

5. מערכת של משוואות דיפרנציאליות

נתונה מערכת המשוואות הדיפרנציאליות הליניאריות מסדר ראשון:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + 2e^{-t} \\ \dot{y} = 2x + 2y + e^{-t} \end{cases}$$

א. 15 נק' מצא/י את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית.

ב. 10 נק' מצא/י את הפתרון הפרטי של המערכת הלא-הומוגנית המקיים את תנאי ההתחלה $x(0) = 0$, $y(0) = 1$

פתרון א':

$$\begin{aligned} \dot{x} = 3x + y + 2e^{-t} & \Rightarrow y = \dot{x} - 3x - 2e^{-t} & \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} - 3\dot{x} + 2e^{-t} \\ \dot{y} = 2x + 2y + e^{-t} & \Rightarrow \dot{y} = 2x + 2(\dot{x} - 3x - 2e^{-t}) + e^{-t} & \Rightarrow \dot{y} = -4x + 2\dot{x} - 3e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \ddot{x} - 3\dot{x} + 2e^{-t} \\ \dot{y} = -4x + 2\dot{x} - 3e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} - 3\dot{x} + 2e^{-t} = -4x + 2\dot{x} - 3e^{-t} \Rightarrow \ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = -5e^{-t}$$

$\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = 0$ the homegenious differential equation

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$$

השאלה ציפה לה סדר II:

הפתרון הכללי של מע' ציפה לה סדר II הוא משפחה של עקמוניות.
שני פרמטרים

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

מע' ציפה לה סדר II עם מקדמים קבועים:
צריך להע' האופני'!
מקבל λ_1, λ_2

1. פתרון המע' הומוגנית:

$$\begin{aligned} y_h &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_1 \neq \lambda_2 & \text{פתרון המע' הומוגנית} & \text{מקרה 1} \\ y_h &= c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} & \lambda_1 = \lambda_2 & \text{"} & \text{מקרה 2} \\ y_h &= e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) & \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta & \text{"} & \text{מקרה 3} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x_h = c_1 e^t + c_2 e^{4t} \Rightarrow \dot{x}_h = c_1 e^t + 4c_2 e^{4t}$$

$$\begin{aligned} y &= \dot{x} - 3x - 2e^{-t} \Rightarrow y_h = \dot{x}_h - 3x_h \Rightarrow y_h = c_1 e^t + 4c_2 e^{4t} - 3(c_1 e^t + c_2 e^{4t}) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_h &= -2c_1 e^t + c_2 e^{4t} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_h = c_1 e^t + c_2 e^{4t} \\ y_h = -2c_1 e^t + c_2 e^{4t} \end{cases}$$

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = -5e^{-t} \Rightarrow Q(t) = -5e^{-t}$$

הצורה הכללית של הפתרון: $y = a e^{\alpha x}$ הצורה הכללית של הפתרון: $Q(x) = e^{\alpha x}$

כדי למצוא את הפתרון הכללי y_p נניח $y_p = a e^{-t}$ (הצורה הכללית של הפתרון) ונציב אותה במשוואה.

$$x_p = a e^{-t} \Rightarrow \dot{x}_p = -a e^{-t} \Rightarrow \ddot{x}_p = a e^{-t}$$

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = -5e^{-t} \Rightarrow a e^{-t} - 5(-a e^{-t}) + 4a e^{-t} = -5e^{-t} \Rightarrow 10a e^{-t} = -5e^{-t} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$x_p = -\frac{1}{2} e^{-t}$$

$$y = y_h + y_p$$

הפתרון הכללי:

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2} e^{-t} \Rightarrow \dot{x} = c_1 e^t + 4c_2 e^{4t} + \frac{1}{2} e^{-t}$$

$$y = \dot{x} - 3x - 2e^{-t} \Rightarrow y = c_1 e^t + 4c_2 e^{4t} + \frac{1}{2} e^{-t} - 3\left(c_1 e^t + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2} e^{-t}\right) - 2e^{-t} \Rightarrow$$

$$y = -2c_1 e^t + c_2 e^{4t}$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2} e^{-t} \\ y(t) = -2c_1 e^t + c_2 e^{4t} \end{cases} \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 - \frac{1}{2} \\ 1 = -2c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = c_1 + c_2 \\ 1 = -2c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} = 3c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{6}$$

$$1 = -2\left(-\frac{1}{6}\right) + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{6} e^t + \frac{2}{3} e^{4t} - \frac{1}{2} e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{3} e^t + \frac{2}{3} e^{4t} \end{cases}$$