5. <u>מערכת של משוואות דיפרנציאליות</u>

נתונה מערכת המשוואות הדיפרנציאליות הליניאריות מסדר ראשון:

$$\begin{cases}\dot{x} = 3x + y + 2e^{-t} \\ \dot{y} = 2x + 2y + e^{-t}\end{cases}$$

א. **15 נק'** מצא/י את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית.

ב. **10 נק'** מצא/י את הפתרון הפרטי של המערכת הלא-הומוגנית המקיים את תנאי ההתחלה $x(0) = 0 \ , \ y(0) = 1$

<u>פתרון א'</u>:

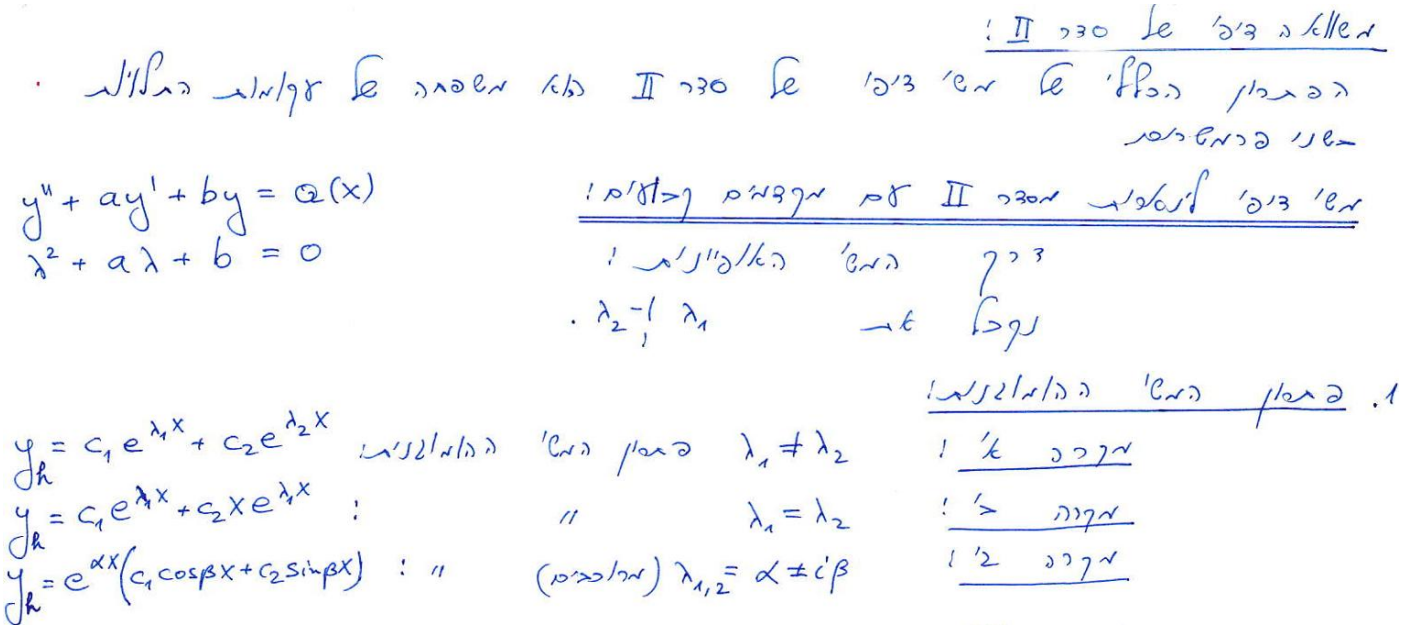
$\dot{x} = 3x + y + 2e^{-t}$ => $y = \dot{x} - 3x - 2e^{-t}$ => $\dot{y} = \ddot{x} - 3\dot{x} + 2e^{-t}$

$\dot{y} = 2x + 2y + e^{-t}$ => $\dot{y} = 2x + 2(\dot{x} - 3x - 2e^{-t}) + e^{-t}$ => $\dot{y} = -4x + 2\dot{x} - 3e^{-t}$

$\begin{cases}\dot{y} = \ddot{x} - 3\dot{x} + 2e^{-t} \\ \dot{y} = -4x + 2\dot{x} - 3e^{-t}\end{cases}$ => $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2e^{-t} = -4x + 2\dot{x} - 3e^{-t}$ => $\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = -5e^{-t}$

$\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = 0$ *the homegenious differential equation*

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ => $(\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$ => $\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 4$



$\lambda_1 \neq \lambda_2$ => $x_h = c_1 e^t + c_2 e^{4t}$ => $\dot{x}_h = c_1 e^t + 4c_2 e^{4t}$

$y = \dot{x} - 3x - 2e^{-t}$ => $y_h = \dot{x} - 3x$ => $y_h = c_1 e^t + 4c_2 e^{4t} - 3(c_1 e^t + c_2 e^{4t})$ =>
=> $y_h = -2c_1 e^t + c_2 e^{4t}$

$$\begin{cases}x_h = c_1 e^t + c_2 e^{4t} \\ y_h = -2c_1 e^t + c_2 e^{4t}\end{cases}$$

פתרון ב':

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = -5e^{-t} \quad \Rightarrow \quad Q_{(t)} = -5e^{-t}$$

הפולינום בהמשך בדיוק!

$Q(x) = e^{\alpha x}$ אם נחפש בהמשך פתרון מהצורה: $y_p = ae^{\alpha x}$ $(\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2)$

כדי למצוא את הקבועים של y_p נציב בפתרון המבוקש, נמצא את הקבועים ונקבל (כמובן) את הפתרון שנמצא עבור y_p.

$$x_p = ae^{-t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_p = -ae^{-t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_p = ae^{-t}$$

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 4x = -5e^{-t} \Rightarrow ae^{-t} - 5(-ae^{-t}) + 4ae^{-t} = -5e^{-t} \Rightarrow 10ae^{-t} = -5e^{-t} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$x_p = -\frac{1}{2}e^{-t}$$

בהמשך כלל:

$$y = y_h + y_p$$

$$x = c_1e^t + c_2e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = c_1e^t + 4c_2e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$y = \dot{x} - 3x - 2e^{-t} \quad \Rightarrow \quad y = c_1e^t + 4c_2e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 3\left(c_1e^t + c_2e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right) - 2e^{-t} \Rightarrow$$

$$y = -2c_1e^t + c_2e^{4t}$$

$$\begin{cases} x_{(t)} = c_1e^t + c_2e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-t} \\ y_{(t)} = -2c_1e^t + c_2e^{4t} \end{cases} \quad \begin{cases} x_{(0)} = 0 \\ y_{(0)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 - \frac{1}{2} \\ 1 = -2c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = c_1 + c_2 \\ 1 = -2c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} = 3c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{6}$$

$$1 = -2\left(-\frac{1}{6}\right) + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x_{(t)} = -\frac{1}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-t} \\ y_{(t)} = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{cases}$$