

4. משוואה דיפרנציאלית מסדר שני: ניתוח איכותי בשימוש מעשי
 המערכת הדינמית של תותח ירי (Gun Barrel) מיוצגת על ידי המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\ddot{y} + y = F(t)$$

כאשר $y(t)$ מתאר את משרעת התנודה של התותח והכוח המאלץ, הנובע ממהלומת ההדף, מוצג על ידי הפונקציה:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{\pi} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

מערכת התותח נמצאת במצב מנוחה קודם לירי, כלומר תנאי ההתחלה הם $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

א. 13 נק' מצא/י את העתק התותח כתלות בזמן, $y(t)$, בקטע הזמן הראשון $0 \leq t \leq \pi$.

ב. 12 נק' מצא/י את $y(t)$ עבור $t > \pi$ תוך דרישת רציפות וגזירות הפתרון בנקודה $t = \pi$.

פתרון א':

$$\ddot{y} + 0\dot{y} + y = F(t)$$

משאלה ב' של סדר II:

הפתרון הכללי של מש' ב' של סדר II הוא משפחה של עקמוניות.
 מש' ב' של סדר II עם מקדמים קבועים:

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

זכור: המש' האלמנטרית
 נקרא λ_1, λ_2

1. במקרה המש' הומוגנית:

$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	במקרה המש' הומוגנית	מקרה א'
$y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$	$\lambda_1 = \lambda_2$	"	מקרה ב'
$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	"	מקרה ג'

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$$

$$y_h = e^{0t} (C_1 \cos 1t + C_2 \sin 1t) \Rightarrow y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

כאשר $t < \pi$, $F(t) = 0$ ואז המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה היא הומוגנית:

$$\ddot{y} + 0\dot{y} + y = 0$$

פתרונה הכללי יהיה לכן הפתרון ההומוגני y_h שקיבלנו לעיל, ז"א:

$$y = y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

כאשר $0 \leq t \leq \pi$, $F(t) \neq 0$ ולכן עבור פרק זמן זה יהא עלינו לחפש פתרון פרטי מתאים שאותו נוסיף לפתרון ההומוגני.

בכך נעסוק בעמוד הבא.

$$y_p = x^s R_m(x) e^{\alpha x}$$

$\frac{1}{s^2} \rightarrow t$ $\frac{1}{s} \rightarrow 1$ $\frac{1}{s-a} \rightarrow e^{at}$
 $Q(x) = e^{\alpha x} \quad \sim t$
 $Q(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$ " $\quad "$

$(\alpha = \lambda_2 \text{ ist } \alpha = \lambda_1) \Rightarrow$ "symmetrisch" und leitet die Ableitung ab "S=1"

$$-(\lambda_1 = \lambda_2) \quad // \quad \partial_1^2 \quad // \quad // \quad \alpha \quad // \quad S=2$$

$R_m(x) = ax + b$ sk $P_m(x) = X$ sk, Gerp
 $R_m(x) = ax^2 + bx + c$ " $P_m(x) = X^2 + 2$ "

$$Q_{(t)} = \left(1 - \frac{t}{\pi}\right) \cdot e^{0 \cdot t}, \quad \alpha = 0 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow s = 0 \Rightarrow y_p = t^0 (at + b) e^{0 \cdot t}$$

כדי לנסות את התקנים של קצ'ז'ים עם אפונים, גרמניה
הבילי (הולנד) ו-80 הלא נקבעים

$$y_p = at + b \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_p = a \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}_p = 0$$

$$\ddot{y}_p + 0\dot{y}_p + y_p = 1 - \frac{t}{\pi} \quad \Rightarrow$$

$$0 + at + b = 1 - \frac{t}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -1/\pi \\ b = 1 \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{1}{\pi}t + 1$$

$$y = y_h + y_p$$

עבור $0 \leq t \leq \pi$

$$y_{(t)} = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t}{\pi} + 1$$

$$y = y_h$$

עמל'ת עבור $t < \pi$ (סעיף ב')

$$y_{(t)} = C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

תנאי ההתחלה בשני פרקי הזמן הנ"ל אינם זהים ולכן ערכי הפרמטרים שבפתרון השני (C_3, C_4) יהיו שונים מאלה שבפתרון הראשון (C_1, C_2) . בהמשך ניקח זאת בחשבון כשנחשב את ערכי הפרמטרים האלה.

כתוב בשאלה שבהתחלה התותח במנוחה, ז"א מהירותו אז היא $\dot{y}_{(0)} = 0$. העתקו אז גם הוא $y_{(0)} = 0$ מן הסתם.

בשל רציפות פונקציות המקום והמהירות (מקום ומהירות אינם משתנים באפס זמן), מתקיים $\dot{y}(\pi^+) = \dot{y}(\pi)$ ו- $y(\pi^+) = y(\pi)$

$$\underline{0 \leq t \leq \pi}$$

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t}{\pi} + 1$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \frac{0}{\pi} + 1 \Rightarrow 0 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = -1$$

$$y(t) = -\cos t + C_2 \sin t - \frac{t}{\pi} + 1$$

$$\dot{y}(t) = \sin t + C_2 \cos t - \frac{1}{\pi}$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow 0 = \sin 0 + C_2 \cos 0 - \frac{1}{\pi} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\pi}$$

$$y(t) = -\cos t + \frac{1}{\pi} \sin t - \frac{t}{\pi} + 1 \Rightarrow y(\pi) = -\cos \pi + \frac{1}{\pi} \sin \pi - \frac{\pi}{\pi} + 1 = 1$$

$$\dot{y}(t) = \sin t + \frac{1}{\pi} \cos t - \frac{1}{\pi} \Rightarrow \dot{y}(\pi) = \sin \pi + \frac{1}{\pi} \cos \pi - \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\underline{\pi < t}$$

$$y(t) = C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

$$y(\pi^+) = y(\pi) = 1 \Rightarrow 1 = C_3 \cos \pi^+ + C_4 \cdot \sin \pi^+ \Rightarrow C_3 = -1$$

$$y(t) = -\cos t + C_4 \sin t$$

$$\dot{y}(t) = \sin t + C_4 \cos t$$

$$\dot{y}(\pi^+) = \dot{y}(\pi) = -\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\frac{2}{\pi} = \sin \pi^+ + C_4 \cos \pi^+ \Rightarrow C_4 = \frac{2}{\pi}$$

$$y(t) = -\cos t + \frac{2}{\pi} \sin t$$

$$\underline{\text{סיכום}}$$

$$\ddot{y} + y = F(t)$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{\pi} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases} \rightarrow y(t) = \begin{cases} -\cos t + \frac{1}{\pi} \sin t - \frac{t}{\pi} + 1 & 0 \leq t \leq \pi \\ -\cos t + \frac{2}{\pi} \sin t & \pi < t \end{cases}$$