

3. משוואה דיפרנציאלית לא הומוגנית מסדר שני

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos(3x)}$$

נתונה משוואה דיפרנציאלית מסדר שני:

א. 10 נק' מצא/י את הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה, $y_h(x)$.

ב. 15 נק' רשום/רשמי את הפתרון הכללי $y(x)$, וציין/י במפורש מי הוא הפתרון ההומוגני ומי הוא הפתרון הפרטי.

פתרון א' :

$$y'' + 0 \cdot y' + 9y = 0$$

משאלה דיפר' של סדר II :

הפתרון הכללי של מש' דיפר' של סדר II הוא משפחה של עקמוניות.
שני פרמטרים

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

מש' דיפר' ליניאר מסדר II עם מקדמים קבועים!
דיק' המש' האלמנטרית!
נקבל λ_1, λ_2

1. במקרה המש' הומוגנית

מקרה א' $\lambda_1 \neq \lambda_2$ הפתרון המש' הומוגנית

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

מקרה ב' $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

מקרה ג' $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$:

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm 3i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 3$$

$$y_h = e^{0x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \Rightarrow y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

פתרון ב' :

לגבי הפתרון הפרטי, האילוץ הוא $Q(x) = \frac{1}{\cos 3x}$ ובדף הנוסחאות לא מופיעה צורת פתרון המתאימה לאילוץ כזה.
נפנה לכן לשיטת לגרנז', ראה בדף הבא.

הערה: הפתרון תקף רק כאשר $\cos 3x \neq 0$

הצגת משוואת קוואנטיזציה (Schrödinger) :

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & Q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = Q(x) \end{cases}$$

המשוואה החדשה היא: $c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = Q(x)$

המשוואה החדשה היא: $c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = Q(x)$

המשוואה החדשה היא: $c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = Q(x)$

$$c_1(x) = \int c_1'(x) dx + \bar{c}_1$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) dx + \bar{c}_2$$

Reminder, the differential equation was: $y'' + 0 \cdot y' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$

and the homogeneous solution derived was: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x \rightarrow \begin{cases} y_1 = \cos 3x \Rightarrow y_1' = -3 \sin 3x \\ y_2 = \sin 3x \Rightarrow y_2' = 3 \cos 3x \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \frac{1}{\cos 3x} & 3 \cos 3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3 \sin 3x & 3 \cos 3x \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{3(\cos^2 3x + \sin^2 3x)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{1}{9} \cdot \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x} \Rightarrow$$

$$C_1(x) = \frac{1}{9} \int \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x} dx \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{9} \ln |\cos 3x| + \bar{C}_1$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3 \sin 3x & \frac{1}{\cos 3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3 \sin 3x & 3 \cos 3x \end{vmatrix}} = \frac{1}{3(\cos^2 3x + \sin^2 3x)} = \frac{1}{3} \Rightarrow C_2(x) = \frac{1}{3} \int dx \Rightarrow C_2(x) = \frac{1}{3} x + \bar{C}_2$$

$$\text{just checking: } \begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x = 0 \quad \text{true} \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = Q(x) \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x) + \frac{1}{3} \cdot 3 \cos 3x = \frac{1}{\cos 3x} \quad \text{true} \end{cases}$$

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{9} \ln |\cos 3x| + \bar{C}_1 \right) \cos 3x + \left(\frac{1}{3} x + \bar{C}_2 \right) \sin 3x$$

$$y = \underbrace{\bar{C}_1 \cos 3x + \bar{C}_2 \sin 3x}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{9} \cos 3x \ln |\cos 3x| + \frac{x}{3} \sin 3x}_{y_p}$$