

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית: $(3x^2y^2 + 2x) dx + f(x, y) dy = 0$

א. **12 נק'** מצא/י את הפונקציה $f(x, y)$ בידוע שהמשוואה מדויקת וכי מתקיים $f(x, 1) = 2x^3 + 4$.

ב. **13 נק'** מצא/י את הפתרון הפרטי של המשוואה הדיפרנציאלית המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 2$.

פתרון א'

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ תנאי למשל: מדויקת

הפתרון: $\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = 0$

מש' דיפרנציאלית מסדר ראשון:

$$(3x^2y^2 + 2x) dx + f_{(x,y)} dy = 0$$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = 3x^2y^2 + 2x \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y \\ Q_{(x,y)} = f_{(x,y)} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \quad \text{exact} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y \Rightarrow f_{(x,y)} = 6 \int yx^2 dx + \varphi_{(y)} \Rightarrow$$

$$f_{(x,y)} = 2x^3y + \varphi_{(y)} \Rightarrow f_{(x,1)} = 2x^3 + \varphi_{(1)}$$

$$\text{given: } f_{(x,1)} = 2x^3 + 4$$

$$2x^3 + \varphi_{(1)} = 2x^3 + 4 \Rightarrow \varphi_{(1)} = 4 \Rightarrow \varphi_{(y)} = 4$$

מותר להניח $\varphi_{(y)} = 4$ (הפונקציה הקבועה) ולא $\varphi_{(y)} = 4y^2$ למשל, כי לא הוגדרו תנאי שפה נוספים מעבר לתנאי $f(x, 1) = 2x^3 + 4$.

$$f_{(x,y)} = 2x^3y + \varphi_{(y)} \Rightarrow f_{(x,y)} = 2x^3y + 4$$

$$f_{(x,y)} = 2x^3y + 4$$

$$Q_{(x,y)} = f_{(x,y)} \Rightarrow Q_{(x,y)} = 2x^3y + 4$$

$$(3x^2y^2 + 2x) dx + (2x^3y + 4) dy = 0$$

הכל צריך להיות מסלול פתרון:

$$P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{תנאי מסלול פתרון}$$

$$\text{לפיכך:} \quad \int_{x_0}^x P(x,y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0,y) dy = 0$$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = 3x^2y^2 + 2x \\ Q_{(x,y)} = 2x^3y + 4 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y \\ &\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y \end{aligned} \quad \text{indeed exact :)}$$

$$\int_{x_0}^x (3x^2y^2 + 2x) dx + \int_{y_0}^y (2x_0^3y + 4) dy = 0$$

$$\left[x^3y^2 + x^2 \right]_{x_0}^x + \left[x_0^3y^2 + 4y \right]_{y_0}^y = 0$$

$$x^3y^2 + x^2 - x_0^3y^2 - x_0^2 + x_0^3y^2 + 4y - x_0^3y_0^2 - 4y_0 = 0$$

$$x^3y^2 + x^2 + 4y = C$$

$$C = -(x_0^3y_0^2 + 4y_0 + x_0^2)$$

$$y_{(1)} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1^3 \cdot 2^2 + 1^2 + 4 \cdot 2 = C \quad \Rightarrow \quad 13 = C$$

$$x^3y^2 + x^2 + 4y = 13$$