

ביה"ס הגבוה ע"ש שנקר

משוואות דיפרנציאליות – מבחן מועד ב' קיץ 2026

מרצה: דר' יאיר דנקנר מתרגל: מר ארז שדך

משך הבחינה: שעתיים וחצי. חומר עזר המותר בשימוש: דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט ומחשבון אישי. יש לענות על ארבע מחמש השאלות הבאות. **בהצלחה.**

1. משוואה דיפר' מסדר ראשון לא ליניארית: ניתוח איכותי לשימוש בעולם הדייג

במסגרת מודל לניהול משאבי הדייג באוקיינוס השקט, נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הלא-ליניארית מסדר ראשון המתארת את גודל אוכלוסיית הדגים $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N - E \cdot N$$

כאשר r, K, E הם קבועים חיוביים ומקיימים $E < r$. $E \cdot N$ מייצג את שלל הדייג (הפדיון).

א. **6 נק'** סרטט סקיצה איכותית של קצב השינוי $\frac{dN}{dt}$ כפונקציה של גודל האוכלוסייה N (עבור $N \geq 0$).

ב. **6 נק'** מצא את נקודות שיווי המשקל של המערכת והסבר מדוע מבחינה מתמטית הן נקראות נקודות שיווי משקל.

ג. **6 נק'** קבע עבור כל נקודת שיווי משקל האם היא **יציבה** או **לא-יציבה**. נמק את קביעתך.

ד. **7 נק'** מצא את הפתרון הכללי המפורש של $N(t)$ של המשוואה הדיפרנציאלית.

פתרון ב'

$$\frac{dN}{dt} = N \left[r \left(1 - \frac{N}{k}\right) - E \right] \Rightarrow \frac{dN}{dt} = \frac{N}{k} [r(k - N) - kE] \Rightarrow \frac{dN}{dt} = \frac{N}{k} [k(r - E) - rN]$$

$$\text{at equilibrium } \frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{N}{k} [k(r - E) - rN] \Rightarrow N_1 = 0, \quad N_2 = \frac{k(r - E)}{r} = k \left(1 - \frac{E}{r}\right)$$

נקודות שיווי המשקל הן

$$N_1 = 0, \quad N_2 = k \left(1 - \frac{E}{r}\right)$$

הן נקראות כך מכיוון שבהן $\frac{dN}{dt} = 0$ ז"א N אינו משתנה.

פתרון ג'

שיווי המשקל ב- N_1 אינו יציב כי עבור

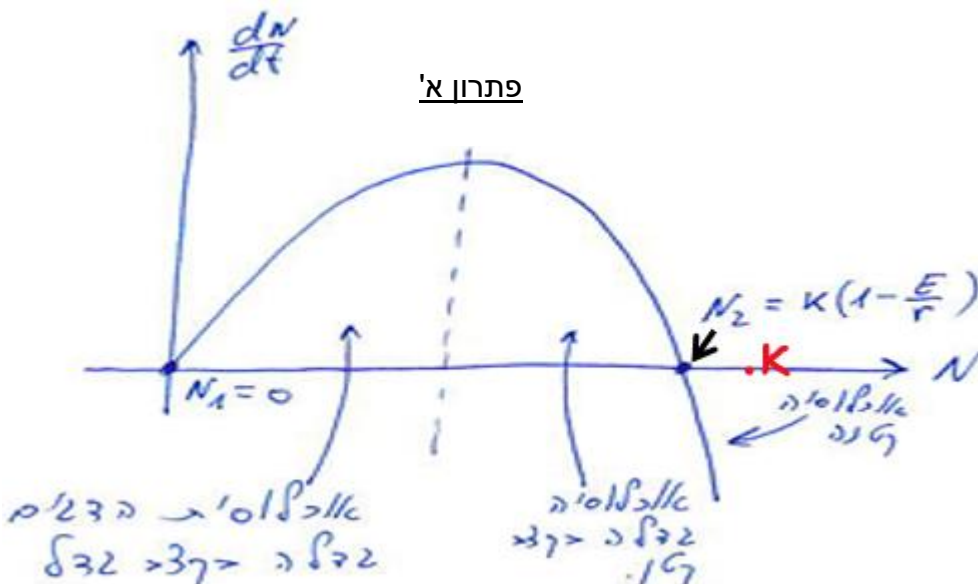
סביבה ימנית קרובה ל- 0 , $0 < \frac{dN}{dt}$, ולפיכך

כל הפרעה מ- $N = 0$ תגרום ל- $N(t)$ לגדול ולהתרחק מ- $N_1 = 0$.

בקיצור – כשיש דגים הם מתרבים, אין חזרה לאפס דגים (משוב חיובי).

שיווי המשקל ב- N_2 יציב כי בנקודה זו כל

גדילה נוספת של אוכלוסיית הדגים מביאה לריבוי שלילי אשר מקטין אותה בחזרה וכל פיתוח באוכלוסייה מביא לריבוי חיובי אשר מגדיל אותה בחזרה (משוב שלילי).



$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N - E \cdot N \Rightarrow \frac{dN}{dt} = \left[r \left(1 - \frac{N}{k}\right) - E \right] N$$

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N$$

"ר" - r
N₁ = 0
N₂ = k

ג'רסל מלכמן ורביץ (המורה בלוגיסטיקה):
Verhulst (1834), המהמט'קאי הגרסל
אלה גרסל גרסל באמצעות 1980-1990.

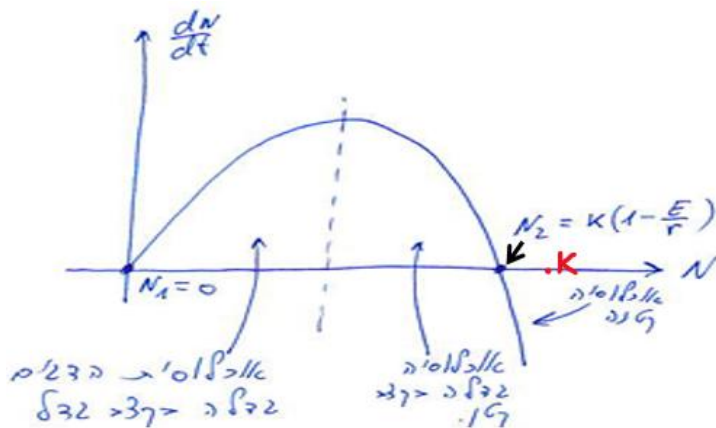
$$N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0) e^{-rt}}$$

ג) נחליף במבחן של המודל הלוגיסטי עם r-E
נחליף עם k עם $\frac{k(r-E)}{r}$

$$\frac{dN}{dt} = (r-E) \left(1 - \frac{N}{\frac{k(r-E)}{r}}\right) N$$

לפיכך,

$$N(t) = \frac{N_0 k(r-E)/r}{N_0 + \left(\frac{k(r-E)}{r} - N_0\right) e^{-(r-E)t}}$$



מדוע החלפות אלה תקפות?

r הוא קצב הגידול הטבעי של אוכלוסיית הדגים.

הדייג E מקטין קצב זה לכדי r - E

k הוא גודל האוכלוסייה המרבי שיכול להינתמך בידי

הסביבה, בהינתן משאביה הזמינים.

ללא דייג, שיווי המשקל N₂ מתקבל בנקודה k.

הדייג מקטין את שיווי המשקל N₂ לכדי $k \frac{r-E}{r}$

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N - E N$$

דף 2 דגש תר' 2 -
מודל שפולר

בתרגיל הזה שבאתר שלי ניתן לראות כיצד פותרים את המשוואה

הדיפרנציאלית הזו ללא היעזרות בדף הנוסחאות ובפתרונות ידועים, אבל במבחן אין מספיק זמן לכך.