

5. מערכת של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

מהו הפתרון הכללי של מערכת המשוואות הדיפרנציאליות ליניאריות מסדר ראשון,

$$\begin{cases} y_1(0) = -1.25 \\ y_2(0) = 1.5 \end{cases} \quad \text{כאשר} \quad \begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 + 5e^{-x} \\ y_2' = -6y_1 + 5y_2 + 8x^2 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 + 5e^{-x} \\ y_2' = -6y_1 + 5y_2 + 8x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5y_1' = 10y_1 - 5y_2 - 25e^{-x} \\ y_2' = -6y_1 + 5y_2 + 8x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2' - 5y_1' = 4y_1 + 8x^2 - 25e^{-x} \Rightarrow y_2' = 4y_1 + 8x^2 - 25e^{-x} + 5y_1'$$

$$y_1' = -2y_1 + y_2 + 5e^{-x} \Rightarrow y_2' = y_1'' + 2y_1' + 5e^{-x}$$

$$\begin{cases} y_2' = 4y_1 + 8x^2 - 25e^{-x} + 5y_1' \\ y_2' = y_1'' + 2y_1' + 5e^{-x} \end{cases} \Rightarrow 4y_1 + 8x^2 - 25e^{-x} + 5y_1' = y_1'' + 2y_1' + 5e^{-x}$$

$$\Rightarrow y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 8x^2 - 30e^{-x}$$

השאלה ביציג על סדר II:

הפתרון הכללי של מערכת דיפרנציאליות מסדר II הוא משפחה של עקמוניות הרגולריות.

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

מערכת דיפרנציאליות מסדר II עם מקדמים קבועים:

זיג המערכת האופיינית:

$$\lambda_1, \lambda_2$$

מקרה

1. במקרה המערכת ההומוגנית:

אנחנו נק' 1

אנחנו נק' 2

אנחנו נק' 3

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \text{ההומוגנית} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} \quad \text{":} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad \text{":} \quad (\text{מחלקים}) \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$$y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 8x^2 - 30e^{-x}$$

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני של y_1 :

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y_{1h} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y_{1h} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

$$y_{1h} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

$$Q(x) = 8x^2 - 30e^{-x}$$

הצורה	הצורה	הצורה	הצורה
$(\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2) y_p = a e^{\alpha x}$	אם $\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2$	$Q(x) = e^{\alpha x}$	$s=0$
$y_p = x^s R_m(x) e^{\alpha x}$	אם $\alpha = \lambda_1$ או $\alpha = \lambda_2$	$Q(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$	$s=1$
$(\alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2)$	אם $\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2$	$Q(x) = e^{\alpha x}$	$s=0$
$(\alpha = \lambda_2 \text{ ו/או } \alpha = \lambda_1)$	אם $\alpha = \lambda_1$ או $\alpha = \lambda_2$	$Q(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$	$s=1$
$(\alpha = \lambda_1 = \lambda_2)$	אם $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$	$Q(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$	$s=2$

$P_m(x)$ היא פולינום ממעלה m ו- $R_m(x)$ היא פולינום ממעלה m .

אם $R_m(x) = ax + b$ אז $P_m(x) = x$ או $P_m(x) = x^2 + 2$

$$\begin{cases} Q_{A(x)} = 8x^2 \cdot e^{0 \cdot x}, & \alpha = 0 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow s = 0 \Rightarrow y_{p1} = x^0(ax^2 + bx + c)e^{0 \cdot x} \\ Q_{B(x)} = 30e^{-1 \cdot x}, & \alpha = -1 = \lambda_1 \Rightarrow s = 1 \Rightarrow y_{p2} = x^1(d)e^{-1 \cdot x} \end{cases}$$

$$y_{1p} = ax^2 + bx + c + xde^{-x}$$

הצורה הכללית של הפתרון הפרטי היא $y_p = y_{p1} + y_{p2}$. נציב את y_{1p} במשוואה ונשווה מקדמים.

$$y_{1p} = ax^2 + bx + c + dx e^{-x} \Rightarrow y'_{1p} = 2ax + b + de^{-x} - dx e^{-x} \Rightarrow$$

$$y''_{1p} = 2a - de^{-x} - de^{-x} + dx e^{-x} \Rightarrow y''_{1p} = 2a - 2de^{-x} + dx e^{-x}$$

$$y''_{1p} - 3y'_{1p} - 4y_{1p} = 8x^2 - 30e^{-x}$$

$$2a - 2de^{-x} + dx e^{-x} - 6ax - 3b - 3de^{-x} + 3dx e^{-x} - 4ax^2 - 4bx - 4c - 4dx e^{-x} = 8x^2 - 30e^{-x}$$

$$-5de^{-x} - 4ax^2 - (6a + 4b)x + 2a - 3b - 4c = 8x^2 - 30e^{-x}$$

$$\begin{cases} 5d = 30 \Rightarrow d = 6 \\ -4a = 8 \Rightarrow a = -2 \\ 6a + 4b = 0 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \quad 2a - 3b - 4c = 0 \Rightarrow 4c = -13 \Rightarrow c = -\frac{13}{4}$$

$$y_{1p} = -2x^2 + 3x - \frac{13}{4} + 6xe^{-x}$$

$$y = y_h + y_p$$

הפתרון הכללי הוא $y = y_h + y_p$.

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + 6xe^{-x} - 2x^2 + 3x - \frac{13}{4}$$

$$y_1 = (6x + C_1)e^{-x} + C_2e^{4x} - 2x^2 + 3x - \frac{13}{4}$$

$$y_1' = 6e^{-x} - (6x + C_1)e^{-x} + 4C_2e^{4x} - 4x + 3$$

$$y_1' = -(6x - 6 + C_1)e^{-x} + 4C_2e^{4x} - 4x + 3$$

$$\text{given: } y_1' = -2y_1 + y_2 + 5e^{-x} \Rightarrow y_2 = y_1' + 2y_1 - 5e^{-x}$$

$$y_2 = -(6x - 6 + C_1)e^{-x} + 4C_2e^{4x} - 4x + 3 + 2(6x + C_1)e^{-x} + 2C_2e^{4x} - 4x^2 + 6x - \frac{13}{2} - 5e^{-x}$$

$$y_2 = (6x + 1 + C_1)e^{-x} + 6C_2e^{4x} - 4x^2 + 2x - \frac{7}{2}$$

$$\begin{cases} y_{1(x)} = (6x + C_1)e^{-x} + C_2e^{4x} - 2x^2 + 3x - \frac{13}{4} \\ y_{2(x)} = (6x + 1 + C_1)e^{-x} + 6C_2e^{4x} - 4x^2 + 2x - \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{1(0)} = -1.25 \\ y_{2(0)} = 1.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1.25 = (6 \cdot 0 + C_1)e^0 + C_2e^0 - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - \frac{13}{4} \\ 1.5 = (6 \cdot 0 + 1 + C_1)e^0 + 6C_2e^0 - 4 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1.25 = C_1 + C_2 - \frac{13}{4} \\ 1.5 = 1 + C_1 + 6C_2 - \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 4 = C_1 + 6C_2 \end{cases} \Rightarrow 2 = 5C_2 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{8}{5} \\ C_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{1(x)} = \left(6x + \frac{8}{5}\right)e^{-x} + \frac{2}{5}e^{4x} - 2x^2 + 3x - \frac{13}{4} \\ y_{2(x)} = \left(6x + \frac{13}{5}\right)e^{-x} + \frac{12}{5}e^{4x} - 4x^2 + 2x - \frac{7}{2} \end{cases}$$