

יש לפתור את מערכת המשוואות הדיפרנציאליות הבאה, תחת תנאי ההתחלה $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\dot{x} = -8x - 4y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \Rightarrow \dot{y} - 4\dot{x} = -5x$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 4\dot{x} = -5x$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dot{x} - 2x \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = \ddot{x} - 2\dot{x} \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 0 \quad \leftarrow \quad Q(t) = 0 \Rightarrow \text{Homogeneous}$$

אנחנו צריכים למצוא את הפתרונות הכלליים של המערכת הדיפרנציאלית. נשתמש בשיטת המעבר למערכת חסומה.

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

נמצא את הערכים העigen של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

הערכים העigen הם $\lambda_1 = 1$ ו- $\lambda_2 = 5$.

הפתרון הכללי הוא:

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$$

אם $\lambda_1 = \lambda_2$, הפתרון הכללי הוא:

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

אם $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$, הפתרון הכללי הוא:

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x_h = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$$

$$y = \dot{x} - 2x = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2C_1 e^t - 2C_2 e^{5t} \Rightarrow y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 = C_1 + C_2 \\ y(0) = 2 = -C_1 + 3C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 3/4 \\ C_1 = 1/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} e^t + \frac{3}{4} e^{5t} \\ y(t) = -\frac{1}{4} e^t + \frac{9}{4} e^{5t} \end{cases}$$