

5. עליך להוכיח את המשפט: אם הוורנסקיאן Wronskian שווה לאפס אז קיימת תלות ליניארית בין שני הפתרונות (לפיכך, הם אינם יסודיים). 18 נק'

מה הבעיה אם הם תלויים ליניארית? 7 נק'

פרמיון ג'יי' ציפ' מסדר שני עם מקדמים קבועים (ס'ט' - ל'נ'ט') :

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

ראשית פותרים את הו'מ' הו'מ'אנ'ט' הו'מ'אנ'ט' הו'מ'אנ'ט' :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

צ'פ' ל'נ'ט' $C(x) \leq C$ ל'מ' ג'מ'ט' ג'מ'ט' י'ו'נ' :

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

י'ק' נ'ל'מ' ל'מ'א'ט' $c_1(x)$ ו' $c_2(x)$:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & Q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_1(x) = \int c_1'(x) dx + \bar{c}_1$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) dx + \bar{c}_2$$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1 + c_2' y_2' = Q(x) \end{cases}$$

הוכחה:

מקרה 1:

$y_1 \equiv 0$ (y_1 שווה זהותית לאפס). מתקבלת אז באופן מיידי תלות ליניארית בין שני הפתרונות:

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 0$$

זהו צירוף ליניארי לא-טריוויאלי (עם $c_1 = 1 \neq 0$) שמאפס את הפונקציות, מה שמגדיר תלות ליניארית.

מקרה 2:

$y_1 \neq 0$ ואז קיימת סביבה שבה $y_1 \neq 0$. בסביבה זו נגדיר $f(x) = \frac{y_2}{y_1}$:

$$W_{(y_1, y_2)} (\text{Wronskian}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$$

$$f(x) = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow f'(x) = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W_{(y_1, y_2)}}{y_1^2} = 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = C \Rightarrow y_2 = C \cdot y_1 \Rightarrow y_1 \text{ and } y_2 \text{ are linearly dependent.}$$

אם שני הפתרונות תלויים ליניארית, הם אינם מהווים קבוצה יסודית (Fundamental Set).

קבוצת פתרונות נקראת יסודית אם היא פורשת את כל מרחב הפתרונות של המשוואה.

כיוון שמרחב הפתרונות של משוואה מסדר שני הוא מממד 2, מתחייבים שני פתרונות בלתי תלויים ליניארית כדי להרכיב בסיס למרחב הזה.