

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית המדויקת הבאה $x^3 dx + 4x dy + y^3 dx = f(x, y) dy$

כאשר $f(x, x) = 3x^3 - 2x$,

א. מהו $f(x, y)$? (12 נק')

ב. מהו הפתרון הכללי של המשוואה? (13 נק')

פתרון א':

השאלה היא: מהו הפתרון הכללי?

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{תנאי למדויקת}$$

$$\text{הפתרון:} \quad \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = 0$$

$$(x^3 + y^3) dx + (4x - f(x, y)) dy = 0$$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = x^3 + y^3 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 \\ Q_{(x,y)} = 4x - f(x, y) \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 4 - \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \quad \text{exact} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$3y^2 = 4 - \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 4 - 3y^2 \Rightarrow f_{(x,y)} = \int (4 - 3y^2) dx + \varphi(y) \Rightarrow$$

$$f_{(x,y)} = (4 - 3y^2)x + \varphi(y)$$

$$f_{(x,y)} = -3xy^2 + 4x + \varphi(y) \Rightarrow f_{(x,x)} = -3x^3 + 4x + \varphi(x)$$

$$f_{(x,x)} = 3x^3 - 2x \leftarrow \text{given}$$

$$3x^3 - 2x = -3x^3 + 4x + \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = 6x^3 - 6x \Rightarrow \varphi(y) = 6y^3 - 6y$$

$$f_{(x,y)} = -3xy^2 + 4x + \varphi(y) \Rightarrow f_{(x,y)} = -3xy^2 + 4x + 6y^3 - 6y$$

$$f_{(x,y)} = 6y^3 + 4x - 3xy^2 - 6y$$

$$Q_{(x,y)} = 4x - f_{(x,y)} \Rightarrow Q_{(x,y)} = 3xy^2 + 6y - 6y^3$$

$$(x^3 + y^3)dx + (3xy^2 + 6y - 6y^3)dy = 0$$

האם זהו צורה מדויקת?

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{האם זה נכון?}$$

$$\text{אם כן:} \quad \int_{x_0}^x P(x,y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0,y)dy = 0$$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = x^3 + y^3 & \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 \\ Q_{(x,y)} = 3xy^2 + 6y - 6y^3 & \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 \end{cases} \quad \text{indeed exact :)}$$

$$\int_{x_0}^x (x^3 + y^3)dx + \int_{y_0}^y (3x_0y^2 + 6y - 6y^3)dy = 0$$

$$\left[\frac{x^4}{4} + xy^3 \right]_{x_0}^x + \left[x_0y^3 + 3y^2 - \frac{3y^4}{2} \right]_{y_0}^y = 0$$

$$\frac{x^4}{4} + xy^3 - \frac{x_0^4}{4} - x_0y^3 + x_0y^3 + 3y^2 - \frac{3y^4}{2} - x_0y_0^3 - 3y_0^2 + \frac{3y_0^4}{2} = 0$$

$$x^4 + 4xy^3 + 12y^2 - 6y^4 = C$$

$$C = x_0^4 - 6y_0^4 + 4x_0y_0^3 + 12y_0^2$$