

4. משוואה דיפרנציאלית מסדר שני

יש לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית, $y'' + 4y = \frac{1}{\sin(2x)}$ (20 נק') ולציין מי הפתרון ההומוגני ומי הפתרון הפרטי (5 נק')

פתרון:

$$y'' + 0 \cdot y' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$$

משוואה דיפרנציאלית מסדר II:

הפתרון הכללי של משוואה דיפרנציאלית מסדר II הוא השכיחה של עקומה הומוגנית.

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

משוואה דיפרנציאלית מסדר II עם מקדמים קבועים:

דיסקרימיננטה Δ של המשוואה $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ היא:

$$\Delta = a^2 - 4b$$

1. במקרה של שתי שורשים שונים:

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \text{הפתרון הכללי של המשוואה הומוגנית}$$

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} \quad \text{במקרה של שורש כפול}$$

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad \text{במקרה של שורשים מרוכבים}$$

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm 2i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 2$$

$$y_h = e^{0x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \Rightarrow y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

לגבי הפתרון הפרטי, האילוץ הוא $Q(x) = \frac{1}{\sin 2x}$ ובדף הנוסחאות לא מופיעה צורת פתרון המתאימה לאילוץ כזה. נפנה לכן לשיטת לגרנז', ראה בדף הבא.

הצגת המערכת (C, Q) כמטריצה ווקטור

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & Q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = Q(x) \end{cases}$$

הצגת המערכת כמטריצה ווקטור

הצגת המערכת כמטריצה ווקטור

$c_2(x)$ ו $c_1(x)$ וקטורים

$$c_1(x) = \int c_1'(x) dx + \bar{c}_1$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) dx + \bar{c}_2$$

Reminder, the differential equation was: $y'' + 0 \cdot y' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

and the homogeneous solution derived was: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \rightarrow \begin{cases} y_1 = \cos 2x \Rightarrow y_1' = -2 \sin 2x \\ y_2 = \sin 2x \Rightarrow y_2' = 2 \cos 2x \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{\sin 2x} & 2 \cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{-1}{2(\cos^2 2x + \sin^2 2x)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_1(x) = -\frac{1}{2} \int dx = -\frac{x}{2} + \bar{C}_1$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & \frac{1}{\sin 2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{2(\cos^2 2x + \sin^2 2x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$C_2(x) = \frac{1}{4} \int \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} dx \Rightarrow C_2(x) = \frac{1}{4} \ln |\sin 2x| + \bar{C}_2$$

$$\text{just checking: } \begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \sin 2x = 0 \quad \text{true} \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = Q(x) \rightarrow -\frac{1}{2} (-2 \sin 2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot 2 \cos 2x = \frac{1}{\sin 2x} \quad \text{true} \end{cases}$$

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \Rightarrow y = \left(-\frac{x}{2} + \bar{C}_1\right) \cos 2x + \left(\frac{1}{4} \ln |\sin 2x| + \bar{C}_2\right) \sin 2x$$

$$y = \bar{C}_1 \cos 2x + \bar{C}_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln |\sin 2x| - \frac{x}{2} \cos 2x$$

y_h

y_p