

מהו הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית הבאה, $15y''' + 15y'' - 15y' - 15y = 4320e^{5x}$

פתרון:

$$y''' + y'' - y' - y = 288e^{5x}$$

משוואה דיפרנציאלית מסדר II: $y'' + ay' + by = Q(x)$
 הפתרון הכללי של משוואה דיפרנציאלית מסדר II הוא משפחה של פונקציות הכוללות את הפתרון הומוגני של המשוואה הומוגנית $y'' + ay' + by = 0$ ופונקציה אחת מהמשפחה $Q(x)$.

המשוואה הומוגנית: $y'' + ay' + by = 0$
 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

המשוואה הומוגנית מסדר II עם מקדמים קבועים:
 נניח λ_1, λ_2 הן השורשים של המשוואה $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.
 אם $\lambda_1 \neq \lambda_2$, הפתרון הכללי הוא $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.
 אם $\lambda_1 = \lambda_2$, הפתרון הכללי הוא $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$.
 אם $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (מרוכבים), הפתרון הכללי הוא $y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

הפתרון הכללי של המשוואה הומוגנית מסדר II:
 1. פתרון הומוגני: $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ (אם $\lambda_1 \neq \lambda_2$)
 2. פתרון הומוגני: $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$ (אם $\lambda_1 = \lambda_2$)
 3. פתרון הומוגני: $y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ (אם $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$)

$$y''' + y'' - y' - y = 288e^{5x} \Rightarrow Q(x) = 288e^{5x} \Rightarrow \text{Non-Homogeneous}$$

משוואה זו היא אומנם מסדר III, אך המשוואה האופיינית שלה ($\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$) ניתנת להצגה

כמכפלה של שתי משוואות אופייניות, האחת מסדר I והשנייה מסדר II, שלכל אחת פתרון (הומוגני) משלה.

בזכות העובדה שלשתי המשוואות האופייניות האלה אין שורשים משותפים, סכום הפתרונות האלה הוא הפתרון ההומוגני של המשוואה הנתונה.

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda + 1) - (\lambda + 1) = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow y_{h1} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \Rightarrow y_{h1} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$$\lambda_3 = 1 \Rightarrow y_{h2} = C_3 e^{\lambda_3 x} \Rightarrow y_{h2} = C_3 e^x$$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x$$

$$y''' + y'' - y' - y = 288e^{5x} \Rightarrow Q(x) = 288e^{5x}$$

$$(\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2) y_p = ae^{\alpha x} \quad \text{! 2/22/21 } 1/2/21 \text{ para } 2 \text{ and } Q(x) = e^{\alpha x} \text{ ok}$$

$$y_p = ae^{5x} \Rightarrow y_p' = 5ae^{5x} \Rightarrow y_p'' = 25ae^{5x} \Rightarrow y_p''' = 125ae^{5x}$$

$$y_p''' + y_p'' - y_p' - y_p = 288e^{5x}$$

$$125ae^{5x} + 25ae^{5x} - 5ae^{5x} - ae^{5x} = 288e^{5x} \Rightarrow 144ae^{5x} = 288e^{5x} \Rightarrow a = 2$$

$$y_p = 2e^{5x}$$

$$y = y_h + y_p$$

$$! 1/2/21 \text{ para } 3$$

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x + 2e^{5x}$$