

$$\begin{cases} y'' = -2y - 4z + e^x \\ z'' = y + 3z \end{cases} \quad \text{מהו הפתרון של מערכת המשוואות הדיפרנציאליות ליניאריות מסדר שני,}$$

$$\begin{cases} y'' = -2y - 4z + e^x \\ y = z'' - 3z \end{cases} \Rightarrow y'' = -2(z'' - 3z) - 4z + e^x \Rightarrow y'' = -2z'' + 2z + e^x$$

$$y = z'' - 3z \Rightarrow y' = z^{(3)} - 3z' \Rightarrow y'' = z^{(4)} - 3z''$$

$$z^{(4)} - 3z'' = -2z'' + 2z + e^x \Rightarrow z^{(4)} - z'' - 2z = e^x$$

השאלה ציפה ל II סדר
הכתיבה הפשוטה של מע' ציפה ל II סדר אבל משפחה של קוואדראטים
שני פרימים

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

מע' ציפה ל אינפיניטסימל II סדר עם מקדמים קבועים!
צריך להסתכל על
נקודה
המע' היא קבועה!
למשל, λ_1, λ_2

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

ההנחה היא $\lambda_1 \neq \lambda_2$
" $\lambda_1 = \lambda_2$
" $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

1. במקום המע' ההנחה
מקרה א'
מקרה ב'
מקרה ג'

$$z^{(4)} - z'' + 0z' - 2z = e^x \Rightarrow Q(x) = e^x \Rightarrow \text{Non-Homogeneous}$$

משוואה זו היא אומנם מסדר IV, אך המשוואה האופיינית שלה ($\lambda^4 - \lambda^2 - 2 = 0$) ניתנת להצגה כמכפלה של שתי משוואות אופייניות מסדר II שלכל אחת פתרון (הומוגני) משלה. בזכות העובדה שלשתי המשוואות האופייניות מסדר II אין שורשים משותפים, סכום הפתרונות האלה הוא הפתרון ההומוגני של המשוואה הנתונה.

$$\lambda^4 - \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \quad \lambda_{3,4} = 0 \pm i$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow z_{h1} = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x}$$

$$\lambda_{3,4} = 0 \pm 1i \Rightarrow \alpha = 0, \quad \beta = 1 \Rightarrow z_{h2} = C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$z_h = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$z^{(4)} - z'' - 2z = e^x \quad \leftarrow \quad Q_{(x)} = e^x$$

$$(\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2) \quad y_p = a e^{\alpha x}$$

! 2/2 x 1/2 2 / 2 x 2 0/2 x . 2
 $Q(x) = e^{\alpha x} \sim e$

$$z_p = a e^x \Rightarrow z_p'' = a e^x \Rightarrow z_p^{(4)} = a e^x$$

$$z_p^{(4)} - z_p'' - 2z_p = e^x \Rightarrow a e^x - a e^x - 2a e^x = e^x \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$z_p = -\frac{1}{2} e^x$$

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

! 1/2 2 / 2 x 2 . 3

$$z_{(x)} = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{1}{2} e^x$$

$$z'_{(x)} = -\sqrt{2}C_1 e^{-\sqrt{2}x} + \sqrt{2}C_2 e^{\sqrt{2}x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x - \frac{1}{2} e^x$$

$$z''_{(x)} = 2C_1 e^{-\sqrt{2}x} + 2C_2 e^{\sqrt{2}x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x - \frac{1}{2} e^x$$

$$y = z'' - 3z$$

$$y = 2C_1 e^{-\sqrt{2}x} + 2C_2 e^{\sqrt{2}x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x - \frac{1}{2} e^x - 3C_1 e^{-\sqrt{2}x} - 3C_2 e^{\sqrt{2}x} - 3C_3 \cos x - 3C_4 \sin x + \frac{3}{2} e^x$$

$$y_{(x)} = -C_1 e^{-\sqrt{2}x} - C_2 e^{\sqrt{2}x} - 4C_3 \cos x - 4C_4 \sin x + e^x$$

$$\begin{cases} y_{(x)} = -C_1 e^{-\sqrt{2}x} - C_2 e^{\sqrt{2}x} - 4C_3 \cos x - 4C_4 \sin x + e^x \\ z_{(x)} = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{1}{2} e^x \end{cases}$$