

3. משוואה דיפרנציאלית מדויקת

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית: $(2xy^3 + 3x^2)dx + f(x,y)dy = 0$

ידוע כי המשוואה מדויקת, וכי מתקיים $f(1,y) = 3y^2 + 2$.

א. יש למצוא את הפונקציה $f(x,y)$ (נק' 12).

ב. יש למצוא את הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית (נק' 13).

פתרון א':

הש' חסר, צריך להשלים:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{תנאי לשלמות}$$

$$\text{הפתרון:} \quad \int_{x_0}^x P(x,y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0,y)dy = 0$$

$$(2xy^3 + 3x^2)dx + f_{(x,y)}dy = 0$$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = 2xy^3 + 3x^2 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 \\ Q_{(x,y)} = f_{(x,y)} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \quad \text{exact} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 \Rightarrow f_{(x,y)} = 6 \int xy^2 dx + \varphi_{(y)} \Rightarrow$$

$$f_{(x,y)} = 3x^2y^2 + \varphi_{(y)} \Rightarrow f_{(1,y)} = 3y^2 + \varphi_{(y)}$$

$$\text{given: } f_{(1,y)} = 3y^2 + 2$$

$$3y^2 + \varphi_{(y)} = 3y^2 + 2 \Rightarrow \varphi_{(y)} = 2$$

$$f_{(x,y)} = 3x^2y^2 + \varphi_{(y)}$$

$$f_{(x,y)} = 3x^2y^2 + 2$$

$$Q_{(x,y)} = f_{(x,y)} \Rightarrow Q_{(x,y)} = 3x^2y^2 + 2$$

$$(2xy^3 + 3x^2)dx + (3x^2y^2 + 2)dy = 0$$

האם צריך לבדוק שהמשוואה היא מדויקת?

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{! צריך לבדוק!}$$

$$\text{לכן :} \quad \int_{x_0}^x P(x,y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0,y) dy = 0$$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = 2xy^3 + 3x^2 \\ Q_{(x,y)} = 3x^2y^2 + 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 \\ &\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2 \end{aligned} \quad \text{indeed exact :)}$$

$$\int_{x_0}^x (2xy^3 + 3x^2) dx + \int_{y_0}^y (3x_0^2y^2 + 2) dy = 0$$

$$\left[x^2y^3 + x^3 \right]_{x_0}^x + \left[x_0^2y^3 + 2y \right]_{y_0}^y = 0$$

$$x^2y^3 + x^3 - x_0^2y^3 - x_0^3 + x_0^2y^3 + 2y - x_0^2y_0^3 - 2y_0 = 0$$

$$x^2y^3 + x^3 + 2y = C$$

$$C = x_0^2y_0^3 + 2y_0 + x_0^3$$