2. משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון

מהו הפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית הבאה, $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}$ כאשר $y(0)=1$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by}{bx+cy} \quad => \quad (ax+by)dx + (bx+cy)dy = 0$$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = ax+by & \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = b \\ Q_{(x,y)} = bx+cy & \rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = b \end{cases} \quad => \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad => \quad exact$$

מש' דיפרנציאלית מדוייקת:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

תנאי לכך מדוייקת:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

הפתרון:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = 0$$

$$\int_{x_0}^{x} (ax+by)\,dx + \int_{y_0}^{y} (bx_0+cy)dy = 0$$

$$\left[\frac{ax^2}{2} + byx\right|_{x_0}^{x} + \left[bx_0y + \frac{cy^2}{2}\right|_{y_0}^{y} = 0$$

$$\frac{ax^2}{2} + byx - \frac{ax_0{}^2}{2} - byx_0 + bx_0y + \frac{cy^2}{2} - bx_0y_0 - \frac{cy_0{}^2}{2} = 0$$

$$ax^2 + 2bxy - ax_0{}^2 + cy^2 - 2bx_0y_0 - cy_0{}^2 = 0$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = C$$

$$C = ax_0{}^2 + 2bx_0y_0 + cy_0{}^2$$

$$y_{(0)} = 1 \quad => \quad a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0\cdot y + c\cdot 1^2 = C \quad => \quad c = C$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = c$$