

2. שימושים במשוואה דיפ' מסדר ראשון

המשוואה הדיפרנציאלית $\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N$ הוצגה לראשונה על ידי המתמטיקאי הבלגי פרהולסט (Verhulst) בשנת 1834. מוהרינג (Mohring) השתמש בה בין השנים 1980-90 כדי לטפל באוכלוסיית דגי הטונה באזורים מסוימים באוקיינוס השקט. מחקר שנערך על חתולי מזחים מגלה כי באזור שגודלו 840 דונם היו 95 חתולים. בכל שנה נולדו כ-400 גורים. לכאורה הייתה האוכלוסייה אמורה לגדול פי 5 מדי שנה, אך למעשה היא שמרה על יציבות. רק אחד מ-8 גורים שרד, והתוספת של 50 גורים בשנה אוזנה על ידי 50 מיתות בשנה, בעיקר עקב אירועי דריסה. המשוואה הדיפ' הנ"ל יכולה לתאר את אוכלוסיית החתולים הזו. מהם ערכי הקבועים במשוואה (10 נק')? יש לצייר את קצב שינוי האוכלוסייה, $\frac{dN}{dt}$, כתלות בגודלה N (5 נק'), לציין ולהסביר מי הן נקודות שיווי המשקל, מה טיבן (יציב או לא יציב) ומדוע.

פתרון:

(k): Carrying capacity. This is the maximum population size that the environment can naturally sustain given its available resources.

(N): Population size. This is the total number of individuals in the population at a given time (t).

(r): Intrinsic growth rate. This is the maximum per-capita growth rate of the population when resources are abundant.

$r = 4$ (a 400 % yearly growth implying x5 yearly growth)

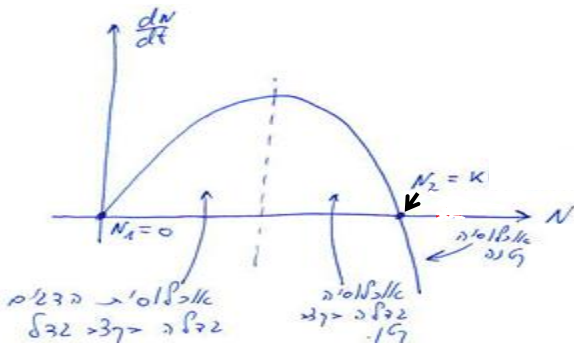
$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N \Rightarrow 0 = 4 \left(1 - \frac{95}{k}\right) \cdot 95 \Rightarrow k = 95$$

נקודות שיווי המשקל:

$$\frac{dN}{dt} = 4 \left(1 - \frac{N}{95}\right) N$$

$$\text{At equilibrium } \frac{dN}{dt} = 0 \quad (N = \text{const.}) \Rightarrow 0 = 4 \left(1 - \frac{N}{95}\right) N \Rightarrow$$

$$N_1 = 0, \quad N_2 = k = 95$$



שיווי המשקל ב- N_1 אינו יציב כי ברגע שישנם חתולים הם מתרבים - אין דרך חזרה לאפס חתולים. עם גדילתה של אוכלוסיית החתולים גובר בהדרגה גם קצב ריבויים עד הגיעו לשיא שלאחריו הוא פוחת בהדרגה לאפס ב- N_2 . בנקודה זו מתייצבת אוכלוסיית החתולים. כל גדילה נוספת שלה מביאה לריבוי שלילי אשר מקטין אותה בחזרה ל- N_2 .

לאור כל האמור לעיל N_2 היא נקודת שיווי משקל יציב (משוב שלילי) ואילו N_1 היא נקודת שיווי משקל לא יציב (משוב חיובי).