

ביה"ס הגבוה ע"ש שנקר

משוואות דיפרנציאליות – מבחן מועד א' קיץ 2025

משך הבחינה: שעתיים וחצי. חומר עזר המותר בשימוש: דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט ומחשבון אישי.
יש לענות על ארבע מחמש השאלות הבאות. **בהצלחה.**

1. משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון

יש לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה, $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2+1}$ (15 נק') ויש לבדוק את הפתרון ולהראותו (10 נק').

פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{dx}{x^2 + 1} + C$$

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{(A+B)y + B - A}{(y+1)(y-1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B-A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right)$$

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \int \frac{dx}{x^2 + 1} + C$$

$$\frac{1}{2} (\ln|y-1| - \ln|y+1|) = \arctan x + C$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \arctan x + C \Rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = 2\arctan x + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{y-1}{y+1} = e^{2\arctan x + C_1} \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = C_2 e^{2\arctan x} \Rightarrow$$

$$y-1 = yC_2 e^{2\arctan x} + C_2 e^{2\arctan x} \Rightarrow$$

$$y(1 - C_2 e^{2\arctan x}) = 1 + C_2 e^{2\arctan x} \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1 + C_2 e^{2\arctan x}}{1 - C_2 e^{2\arctan x}}$$

Check up the easy way:

$$\frac{1}{2}(\ln|y-1| - \ln|y+1|) = \arctg x + C$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}(\ln|y-1| - \ln|y+1|) = \frac{d}{dx}(\arctg x + C)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y'}{y-1} - \frac{y'}{y+1} \right) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) y' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(y+1)(y-1)} y' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{y^2-1} y' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2+1}$$

Check up the actual solution (the hard way):

$$y_{(x)} = \frac{1 + C_2 e^{2\arctg x}}{1 - C_2 e^{2\arctg x}}$$

Evaluating $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2C_2 e^{2\arctg x}}{x^2 + 1} \cdot (1 - C_2 e^{2\arctg x}) + \frac{2C_2 e^{2\arctg x}}{x^2 + 1} (1 + C_2 e^{2\arctg x})}{(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2C_2 e^{2\arctg x} \cdot (1 - C_2 e^{2\arctg x}) + 2C_2 e^{2\arctg x} (1 + C_2 e^{2\arctg x})}{(x^2 + 1)(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2C_2 e^{2\arctg x} (2)}{(x^2 + 1)(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2} = \frac{4C_2 e^{2\arctg x}}{(x^2 + 1)(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2}$$

Evaluating $\frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$:

$$y^2 - 1 = \frac{(1 + C_2 e^{2\arctg x})^2}{(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2} - 1 = \frac{(1 + C_2 e^{2\arctg x})^2 - (1 - C_2 e^{2\arctg x})^2}{(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2} =$$

$$= \frac{(1 + C_2 e^{2\arctg x} + 1 - C_2 e^{2\arctg x})(1 + C_2 e^{2\arctg x} - 1 + C_2 e^{2\arctg x})}{(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2}$$

$$= \frac{(2)(2C_2 e^{2\arctg x})}{(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2} = \frac{4C_2 e^{2\arctg x}}{(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2} \Rightarrow$$

$$\frac{y^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{4C_2 e^{2\arctg x}}{(x^2 + 1)(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2}$$

Conclusion:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4C_2 e^{2\arctg x}}{(x^2 + 1)(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2}$$

$$\frac{y^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{4C_2 e^{2\arctg x}}{(x^2 + 1)(1 - C_2 e^{2\arctg x})^2}$$

↓

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1} \text{ as required, Bingo!}$$