

ביה"ס הגבוה ע"ש שנקר

משוואות דיפרנציאליות – מבחן מועד ב' קיץ 2024

משך הבחינה: שעתיים וחצי. חומר עזר המותר בשימוש: דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט ומחשבון אישי. יש לענות על ארבע מחמש השאלות הבאות. **בהצלחה.**

1. מודל שפּלר – משוואה דיפרנציאלית לא לינארית מסדר ראשון

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - E \cdot N$$

הביולוג הגרמני שפּלר הציג את המשוואה הדיפרנציאלית: $\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - E \cdot N$. מתאר את האוכלוסייה, r , K ו- E קבועים על מנת לתאר את אוכלוסיית דגי הטונה באזור מסויים באוקיאנוס השקט. N מתאר את האוכלוסייה, r , K ו- E קבועים חיוביים כאשר $E < r$. האיבר השני במשוואה מתאר את "השלל" (הפדיון), שהספינות מוציאות מהים. E הוא מקדם יחס לתיאור יכולת האיסוף שלהן.

- א. עליך לצייר את dN/dt כתלות ב- N ולציין את נקודות שיווי המשקל (ש"מ). מדוע הן נקראות נקודות ש"מ? (6 נק').
האם מדובר בש"מ יציב או ש"מ לא-יציב? עליך להסביר מדוע החלטת כפי שהחלטת (6 נק').
ב. עליך לפתור את המשוואה ולמצוא את $N(t)$ (רמז: ניתן להיעזר בדף הנוסחאות ופתרונות ידועים) (13 נק').

(א)

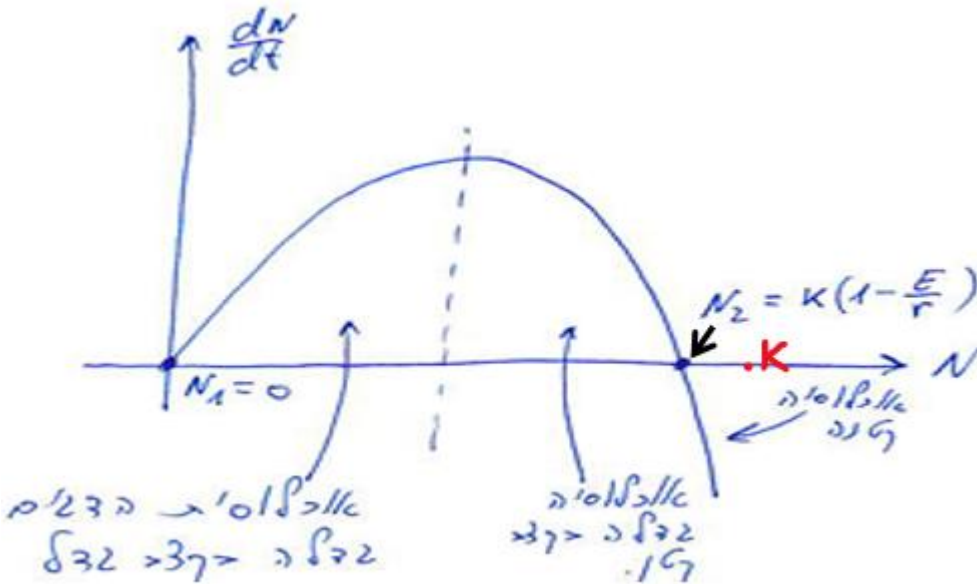
נקודות שיווי המשקל הן

$$N_1 = 0, \quad N_2 = K \left(1 - \frac{E}{r}\right)$$

הן נקראות כך מכיוון שבהן $\frac{dN}{dt} = 0$ ז"א N אינו משתנה.

שיווי המשקל ב- N_1 אינו יציב כי ברגע שישנם דגים הם מתרבים - אין דרך חזרה לאפס דגים. בקיצור - משוב חיובי.

שיווי המשקל ב- N_2 יציב כי בנקודה זו כל גדילה נוספת של אוכלוסיית הדגים מביאה לריבוי שלילי אשר מקטין אותה בחזרה וכל פיחות באוכלוסייה מביא לריבוי חיובי אשר מגדילה בחזרה. בקיצור - משוב שלילי.



(ב)

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - E \cdot N \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = N \left[r \left(1 - \frac{N}{K}\right) - E \right]$$

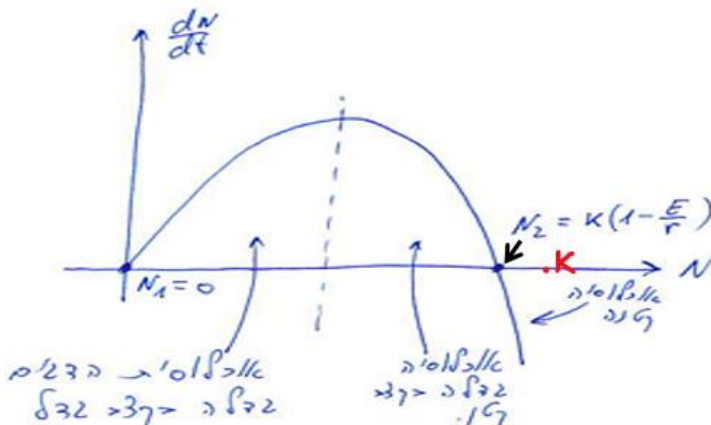
$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N$$

"ר" - גודל האוכלוסיה
 $N_1 = 0$ - נקודת שיווי המשקל
 $N_2 = K$ - נקודת שיווי המשקל

גודל האוכלוסיה (המאכל) (המאכל) (המאכל)
 (1834), Verhulst גודל האוכלוסיה
 1990-1980: גודל האוכלוסיה

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0) e^{-rt}}$$

ג) גודל האוכלוסיה (המאכל) (המאכל) (המאכל)
 $\frac{dN}{dt} = (r-E) \left(1 - \frac{N}{K(r-E)/r}\right) N$
 $N(t) = \frac{N_0 K(r-E)/r}{N_0 + \left(\frac{K(r-E)}{r} - N_0\right) e^{-(r-E)t}}$



מדוע החלפות אלה תקפות?

r הוא קצב הגידול הטבעי של אוכלוסיית הדגים.

הדייג E מקטין קצב זה לכדי $r - E$

k הוא גודל האוכלוסייה המרבי שיכול להיתמך בידי

הסביבה, בהינתן משאביה הזמינים.

ללא דייג, שיווי המשקל N_2 מתקבל בנקודה

הדייג מקטין את שיווי המשקל N_2 לכדי $k \frac{r-E}{r}$

גודל האוכלוסיה (המאכל) (המאכל) (המאכל)
 $\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - E \cdot N$

דף 2 דגש תר' 2 -
 מודל שפולר

בתרגיל הזה שבאתר שלי ניתן לראות כיצד פותרים את המשוואה

הדיפרנציאלית הזו ללא היעזרות בדף הנוסחאות ובפתרונות ידועים, אבל במבחן אין מספיק זמן לכך.