

1. שאלות כלליות

א. עליך להשלים את המשפט הבא: "פתרונה של משוואה דיפרנציאלית מסדר שלישי היא... פרמטרים (2 נק')".
מהו המשפט ההפוך (3 נק')?

מהי המשוואה הדיפרנציאלית שפתרונה, $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3$, (7 נק').

ב. עליך להוכיח את המשפט (מתוך המבוא למש' דיפ' מסדר שני): "אם הוורונסקיאן שווה ל-0 אז קיימת תלות ליניארית בין הפתרונות" (7 נק'). מה הבעיה בהיותם תלויים ליניארית? (6 נק').

פתרון א':

פתרונה של משוואה דיפרנציאלית מסדר שלישי היא משפחה של עקומות התלויות בשלושה פרמטרים.
המשפט ההפוך: מקורה של משפחת עקומות התלויות בשלושה פרמטרים הוא משוואה דיפרנציאלית מסדר שלישי.

Find the differential equation whose solution is: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3$

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

מש' ציפ' ליניארית מסדר II עם מקדמים קבועים!
צריך להטות האלמנטים!
נקבל λ_1, λ_2 .

1. במקרה המש' הומוגנית!

$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$: הומוגנית המש' במקרה $\lambda_1 \neq \lambda_2$ נקבע א'
 $y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$: " $\lambda_1 = \lambda_2$ מקרה '
 $y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$: " $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ נקבע ז'

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3 e^{0 \cdot x}$$

על פי צורת הפתרון מדובר במשוואה דיפ' הומוגנית ($Q(x) = 0$) מסדר שלישי.
יתרה מכך, מדובר במקרה ב' שבו $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$

$$\lambda(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow y''' + y'' - 2y' = 0$$

$$y''' + y'' - 2y' = 0$$

פתרון ב' (בשתי צורות, השנייה של יאיר):

בגדיו מ' צי' 1000 ש' 800 מ' 700 (ש' - 500) :

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1 + c_2' y_2' = Q(x) \end{cases}$$

דאס פארמטער האט דאס פארמטער 'ה' האט דאס פארמטער 'ה' האט דאס פארמטער 'ה' :

ע"כ נ"ל כי $C(x) \in C$ אם x נמצא בתחום ההגדרה של C .

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \delta \\ y_1' & Q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_2(x) \sim k_1 \quad c_4(x) \sim k_2 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$C_f(x) = \int C_f'(x) dx + \bar{C}_f$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) dx + \bar{c}_2$$

הוכחה:

מקרה 1:

$y_1 \equiv 0$ (y_1 שווה זהותית לאפס). מתקבלת אז באופן מידי תלות ליניארית בין שני הפתרונות:

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 0$$

זהו צירוף ליניארי לא-טריוויאלי (עם $c_1 = 1 \neq 0$) שמאפס את הפונקציות, מה שמגדיר תלות ליניארית.

מקרה 2:

$y_1 \neq 0$ ואז קיימת סביבה שבה $y_1 \neq 0$. בסביבה זו נגדיר $f(x) = \frac{y_2}{y_1}$:

$$W_{(y_1, y_2)} \text{ (Wronskian)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$$

$$f_{(x)} = \frac{y_2}{y_1} \quad \Rightarrow \quad f'_{(x)} = \frac{y_1 y'_2 - y_2 y'_1}{y_1^2} = \frac{W_{(y_1, y_2)}}{y_1^2} = 0$$

$$f'_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{(x)} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{y_2}{y_1} = C \quad \Rightarrow \quad y_2 = C \cdot y_1 \quad =$$

> y_1 and y_2 are linearly dependent.

אם שני הפתרונות תלויים ליניארית, הם אינם מהווים קבוצה יסודית (Fundamental Set).

קבוצת פתרונות נקראת יסודית אם היא פורשת את כל מרחב הפתרונות של המשוואה.

כיוון שמרחב הפתרונות של משוואה מסדר שני הוא ממימד 2, מתחייבים שני פתרונות **בלתי תלויים ליניארי** כדי להרכיב בסיס למרחב הזה.

11

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0 \quad \text{כל}$$

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2} \quad \text{s/c}$$

$$\frac{\frac{dy_1}{dx}}{y_1} = \frac{\frac{dy_2}{dx}}{y_2} \Rightarrow \frac{dy_1}{y_1 dx} = \frac{dy_2}{y_2 dx} \Rightarrow \frac{dy_1}{y_1} = \frac{dy_2}{y_2}$$

$$\int \frac{1}{y_1} dy_1 = \int \frac{1}{y_2} dy_2$$

$$\ln y_1 = \ln y_2 + c_1$$

$$y_1 = e^{\ln y_2 + c_1} = e^{\ln y_2} \cdot e^{c_1} = y_2 \cdot m \quad (m = e^{c_1})$$

$$y_1 = m y_2 \quad \text{כלומר,}$$

יש > 2 תנאים לינאריים ולכן הם לא יכולים להיות

פתרון יסודי

מה קורה אם הם גלויים לינאריים?

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \text{הפתרון הכללי}$$

$$y = c_1 y_1 + (c_2/m) y_1 = c_3 y_1 \quad (c_3 = c_1 + \frac{c_2}{m})$$

הפתרון של ג'יי ב'ס מסתבר שכל נלקח משפחה של פתרונות לינאריים

הפתרון הוא (סגור) של משפחת קווי