

ביה"ס הגבוה ע"ש שנקר

משוואות דיפרנציאליות – מבחן מועד א' קיץ 2023

משך הבחינה: שעתיים וחצי. חומר עזר המותר בשימוש: דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט ומחשבון אישי.
יש לענות על ארבע מחמש השאלות הבאות. **בהצלחה.**

1. משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון + מציאת המשוואה הדיפרנציאלית מתוך פתרונה

א. עליך לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה, $(t^2 - x)dt - tdx = 0$, 15 נק'.
ב. מי המשוואה הדיפרנציאלית שפתרונה נתון על ידי $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3$? 10 נק'.

פתרון א:

$$tdx + (x - t^2)dt = 0$$

$$\begin{cases} P_{(x,t)} = t & \rightarrow & \frac{\partial P}{\partial t} = 1 \\ Q_{(x,t)} = x - t^2 & \rightarrow & \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow exact$$

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ תנאי למסלול!

הפתרון: $\int_{x_0}^x P(x,y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0,y)dy = 0$

הערה: מסלול מסוג זה!

$$\int_{x_0}^x t dx + \int_{t_0}^t (x_0 - t^2)dt = 0$$

$$\left[tx \right]_{x_0}^x + \left[x_0 t - \frac{t^3}{3} \right]_{t_0}^t = 0$$

$$tx - tx_0 + x_0 t - \frac{t^3}{3} - x_0 t_0 + \frac{t_0^3}{3} = 0$$

$$3tx - t^3 + t_0^3 - 3x_0 t_0 = 0$$

$$3tx - t^3 = C$$

$$C = 3x_0 t_0 - t_0^3$$

Find the differential equation whose solution is: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3$

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

הש' ציפ' אלגוריתם מסדר II עם מקדמים קבועים!
 3 ציג' הש' האלגוריתם!
 נקבל λ_1, λ_2

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) : "$$

ההוא אלגוריתם $\lambda_1 \neq \lambda_2$ במקום הש' $\lambda_1 = \lambda_2$ " $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (מרוכבים)

1. במקום הש' ההוא אלגוריתם!

מקרה 1

מקרה 2

מקרה 3

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3 e^0$$

על פי צורת הפתרון, מדובר במשוואה הומוגנית מסדר III שבה $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$

$$\lambda(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow y''' + y'' - 2y' = 0$$

$$y''' + y'' - 2y' = 0$$