

3. משוואת ברנולי

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית מסדר ראשון, שאינה ליניארית, $y' + p(x)y = y^n Q(x)$, כאשר $n \neq 1$. יש להוכיח את הפתרון הנתון אצלך בדף הנוסחאות ולהסביר כל שלב בדרך אל הפתרון. 50 נק'.

פתרון:

ראשית, זוהי הצורה של משוואת ברנולי והפתרון המתאים לה שיש להוכיח את נכונותו:

$$y' + p(x)y = y^n Q(x) \quad (n=0 \text{ ו/או } n=1 \text{ אינם ליניאריים})$$

(יש גם ברנולי)

$$\text{הנניח: } y^{1-n} = \left[C + (1-n) \int Q(x) e^{\int (1-n)p(x) dx} dx \right] e^{-\int (1-n)p(x) dx}$$

בהמשך ננסה להביאה לצורה של משוואה ליניארית, ואז על סמך הפתרון הרשום כאן כמתאים למשוואה ליניארית להראות שגם הפתרון הרשום לעיל כמתאים למשוואת ברנולי אכן מתאים ונכון למשוואת ברנולי.

$$y' + p(x)y = Q(x) \quad \text{אם } n=0 \text{ אז } y^0 = 1 \text{ וזהו פתרון ליניארי}$$

$$\text{אם } n \neq 0: y = \left[C + \int Q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right] e^{-\int p(x) dx}$$

$$y' + P_{(x)}y = y^n Q_{(x)} \quad / \cdot y^{-n}$$

$$y^{-n}y' + P_{(x)}y^{1-n} = Q_{(x)}$$

$$z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n} \cdot y' \Rightarrow y^{-n} \cdot y' = \frac{z'}{1-n}$$

$$\frac{z'}{1-n} + P_{(x)}z = Q_{(x)}$$

$$\frac{z'}{1-n} + P_{(x)}z = Q_{(x)} \quad / \cdot (1-n) \quad \text{to get the linear equation form } y' + p(x)y = Q(x) \text{ which we want.}$$

$$z' + (1-n)P_{(x)}z = (1-n)Q_{(x)} \quad \leftarrow \quad P_{1(x)} = (1-n)P_{(x)}, \quad Q_{1(x)} = (1-n)Q_{(x)}$$

$$z' + P_{1(x)}z = Q_{1(x)} \quad \text{and we got the linear equation form which we wanted!}$$

$$\text{to solve for } z \text{ we now substitute } P_{1(x)} \text{ for } P_{(x)} \text{ and } Q_{1(x)} \text{ for } Q_{(x)} \text{ in } y = \left[C + \int Q_{(x)} e^{\int p(x) dx} dx \right] e^{-\int p(x) dx}$$

$$z = \left[C + \int (1-n)Q_{(x)} e^{\int (1-n)P_{(x)} dx} dx \right] e^{-\int (1-n)P_{(x)} dx}$$

lastly, since $z = y^{1-n}$ we substitute y^{1-n} for z :

$$y^{1-n} = \left[C + (1-n) \int Q_{(x)} e^{\int (1-n)P_{(x)} dx} dx \right] e^{-\int (1-n)P_{(x)} dx}$$

$$\text{הנניח: } y^{1-n} = \left[C + (1-n) \int Q(x) e^{\int (1-n)p(x) dx} dx \right] e^{-\int (1-n)p(x) dx}$$

Checked! 😊