

ביה"ס הגבוה ע"ש שנקר

משוואות דיפרנציאליות – בוחן אמצע קיץ 2025

משך הבחינה: שעה אחת בלבד. ללא חומר עזר פרט למחשבון אישי ודף נוסחאות שהוכן על ידך.

על היצע וביקוש בכלכלה

נתון כי ההיצע (Q_s Supply) והביקוש (Q_d Demand) למוצר מסוים בשוק נתונים על ידי:

$$Q_d = 14 - 3 \cdot P, Q_s = -6 + 2 \cdot P$$

מחיר המוצר P לאורך הזמן t , משתנה על פי המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\frac{dP}{dt} = 4 \cdot (Q_d - Q_s), t \geq 0$$

א. יש לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית ולקבל את הערך של $P(t)$ ב-20 נק'

ב. מה משמעות הפתרון כאשר $t \rightarrow \infty$? (משמעות כלכלית). 20 נק'

ג. אם ברגע $t=0$ מחיר המוצר הוא K ומתקיים ש: $K > 4$; $K \in Real$, מהו $P(t)$ ומהו הגרף של $P(t)$ ב-20 נק'

פתרון א':

$$Q_d - Q_s = 14 - 3 \cdot P - (-6 + 2 \cdot P) = 20 - 5P$$

$$\frac{dP}{dt} = 4 \cdot (20 - 5P) \Rightarrow \frac{dP}{dt} = -20(P - 4) \Rightarrow \frac{dP}{P - 4} = -20dt \Rightarrow \frac{dP}{P - 4} + 20dt = 0$$

$$\int \frac{dP}{P - 4} + 20 \int dt = C \Rightarrow \ln|P - 4| + 20t = C \Rightarrow \ln|P - 4| = C - 20t \Rightarrow$$

$$|P - 4| = e^{C-20t} \quad \text{assume } P > 4 \Rightarrow P_{(t)} = Ce^{-20t} + 4 \quad \text{is the general solution for } P_{(t)}$$

פתרון ב' (משמעות הפתרון מסעיף א' עבור $t \rightarrow \infty$):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} (Ce^{-20t} + 4) = 4 \Rightarrow \text{after a long time the price stabilizes on the value of 4}$$

האם יכולנו לדעת זאת גם מבלי לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית? התשובה היא כן.

לאחר זמן רב מערכות מתייצבות בד"כ ופוסקים בהן השינויים, לכן מתאפסות בהן הנגזרות לפי זמן ($\frac{df}{dt} = 0$):

$$\frac{dP}{dt} = 4 \cdot (Q_d - Q_s) \quad Q_d = 14 - 3 \cdot P, \quad Q_s = -6 + 2 \cdot P$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{(t)} \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow 4 \cdot (Q_d - Q_s) = 0 \Rightarrow Q_d = Q_s \Rightarrow P = 4$$

פתרון ג' :

אם ברגע $t=0$ מחיר המוצר הוא K ומתקיים ש: $K > 4$, מהו $P(t)$ ומהו הגרף של $P(t)$?
בסעיף א' מצאנו את הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית, כאן מבקשים מאיתנו פתרון פרטי.

$$P_{(t)} = Ce^{-20t} + 4 \quad \Rightarrow \quad P_{(0)} = C + 4 \quad \Rightarrow \quad C = P_{(0)} - 4 \quad P_{(t)} = (P_0 - 4)e^{-20t} + 4$$

$$P_0 = k \quad \Rightarrow \quad P_{(t)} = (K - 4)e^{-20t} + 4$$

