

ביה"ס הגבוה ע"ש שנקר

משוואות דיפרנציאליות – בוחן אמצע נוסף קיץ 2024

משך הבחינה: שעה אחת בלבד. ללא חומר עזר פרט למחשבון אישי ודף נוסחאות שהוכן על ידך. יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות הבאות. תילקחנה בחשבון השתיים הטובות יותר. בִּהְצָלָהּ.

1. מודל שפּלר

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - E \cdot N$$

הביולוג הגרמני שפּלר הציג את המשוואה הדיפרנציאלית:

על מנת לתאר את אוכלוסיית דגי הטונה באזור מסויים באוקיאנוס השקט. N מתאר את האוכלוסייה, r, K ו- E קבועים חיוביים כאשר $E < r$. האיבר השני במשוואה מתאר את "השלל" (הפדיון), שהספינות מוציאות מהים. E הוא מקדם יחס לתיאור יכולת האיסוף שלהן.

א. עליך לצייר את dN/dt כתלות ב- N ולציין את נקודות שיווי המשקל (ש"מ). מדוע הן נקראות נקודות ש"מ? (10 נק').
האם מדובר בש"מ יציב או ש"מ לא-יציב? עליך להסביר מדוע החלטת כפי שהחלטת (20 נק').

ב. עליך לפתור את המשוואה ולמצוא את $N(t)$ (רמז: ניתן להיעזר בדף הנוסחאות ופתרונות ידועים) (20 נק').

(א)

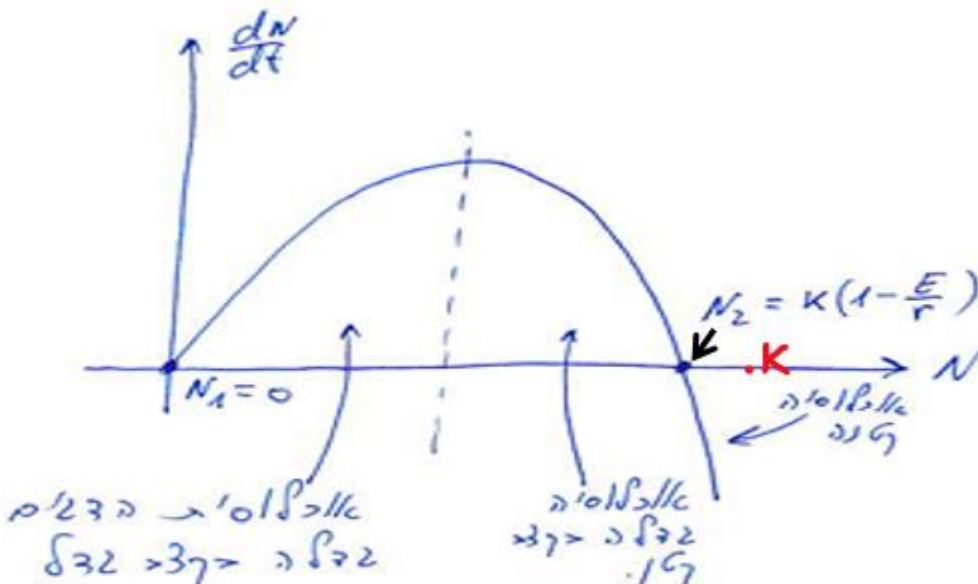
נקודות שיווי המשקל הן

$$N_1 = 0, \quad N_2 = K \left(1 - \frac{E}{r}\right)$$

הן נקראות כך מכיוון שבהן $\frac{dN}{dt} = 0$
ז"א N אינו משתנה.

שיווי המשקל ב- N_1 אינו יציב כי ברגע שישנם דגים הם מתרבים - אין דרך חזרה לאפס דגים. בקיצור – משוב חיובי.

שיווי המשקל ב- N_2 יציב כי בנקודה זו כל גדילה נוספת של אוכלוסיית הדגים מביאה לריבוי שלילי אשר מקטין אותה בחזרה וכל פיחות באוכלוסייה מביא לריבוי חיובי אשר מגדילה בחזרה. בקיצור – משוב שלילי.



(ב