

א. פתרנו המשוואה הדיפרנציאלית $mg - bv^2 = m \frac{dv}{dt}$ וקיבלנו $v(t) = k \frac{v_0 + k + (v_0 - k)e^{-pt}}{v_0 + k - (v_0 - k)e^{-pt}}$ כאשר $k = \sqrt{\frac{mg}{b}}$.

ו- $p = 2\sqrt{\frac{bg}{m}}$. תוך שימוש בטור מקלורן בפיתוח של e^{-x} עליך למצוא את $\lim_{b \rightarrow 0} v(t)$. 20 נק'. האם התוצאה

מתאימה עם לימודי הפיסיקה? 5 נק'.

ב. מי המשוואה הדיפרנציאלית שפתרונה נתון על ידי $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3$? 10 נק'.

א)

$$v(t) = k \frac{v_0 + k + (v_0 - k)e^{-pt}}{v_0 + k - (v_0 - k)e^{-pt}} \quad k = \sqrt{\frac{mg}{b}} \quad p = 2\sqrt{\frac{bg}{m}}$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} v(t) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} k \frac{v_0 + k + (v_0 - k)e^{-pt}}{v_0 + k - (v_0 - k)e^{-pt}} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} k \frac{k + (-k)e^{-pt}}{k - (-k)e^{-pt}} =$$

$$= \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} k \frac{k(1 - e^{-pt})}{k(1 + e^{-pt})} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} k \frac{1 - e^{-pt}}{1 + e^{-pt}}$$

$$k = \sqrt{\frac{mg}{b}} \Rightarrow b \rightarrow 0 \text{ implies } k \rightarrow \infty, \quad p = 2\sqrt{\frac{bg}{m}} \Rightarrow b \rightarrow 0 \text{ implies } p \rightarrow 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \Rightarrow e^x \approx 1 + x \text{ when } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} k \frac{1 - e^{-pt}}{1 + e^{-pt}} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} k \frac{1 - (1 - pt)}{1 + (1 - pt)} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} k \frac{pt}{2 - pt} = \lim_{b \rightarrow 0} \sqrt{\frac{mg}{b}} \cdot \frac{2\sqrt{\frac{bg}{m}} t}{2 - 2\sqrt{\frac{bg}{m}} t} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{mg}{b}} \cdot \sqrt{\frac{bg}{m}} t}{1 - \sqrt{\frac{bg}{m}} t} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{gt}{1 - \sqrt{\frac{bg}{m}} t} = \frac{gt}{1 - 0} = gt \Rightarrow \lim_{b \rightarrow 0} v(t) = gt$$

התוצאה היא הנוסחה המוכרת למהירות כתלות בזמן בנפילה חופשית ללא חיכוך.

ב. מי המשוואה הדיפרנציאלית שפתרונה נתון על ידי $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3$? 10 נק'.

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{1x} + C_3 e^{0x}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow y''' - 3y'' + 2y' = 0$$