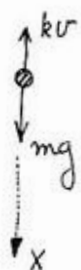


7) חלקיק בעל מסה m נופל ממנוחה במרחק h בגובה h . ניתן להניח, בקירוב, כי ההתנגדות יחסית לאינדיקס של החלקיק והיא kv כאשר k הוא קבוע. מצא את אינדיקס המיקום של החלקיק בכל זמן t .



הנחה: כוח כבידה $\rightarrow mg$ נפילת גופים.

פתרון באמצעות הפרדת משתנים:

$$\sum F = ma \Rightarrow mg - kv = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = m \frac{dv}{mg - kv} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{m} dt = \frac{dv}{v - \frac{mg}{k}} \Rightarrow C - \frac{k}{m} \int dt = \int \frac{dv}{v - \frac{mg}{k}} \Rightarrow$$

$$C - \frac{k}{m} t = \ln\left(\frac{mg}{k} - v\right) \Rightarrow \frac{mg}{k} - v = e^{C - \frac{k}{m} t} \Rightarrow v(t) = \frac{mg}{k} - C e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{mg}{k} - C \Rightarrow C = \frac{mg}{k}$$

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m} t} \Rightarrow v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right)$$

$$x(t) = \int v(t) dt + C = \frac{mg}{k} \int \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right) dt + C \Rightarrow x(t) = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m} t}\right) + C$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{mg}{k} \left(\frac{m}{k}\right) + C \Rightarrow -\frac{m^2 g}{k^2} = C$$

$$x(t) = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m} t}\right) - \frac{m^2 g}{k^2} \Rightarrow x(t) = \frac{mg}{k} \left[\left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m} t}\right) - \frac{m}{k}\right]$$

לשם השוואה - פתרון $v(t)$ באמצעות הנוסחה למד"ר ליניארית מסדר ראשון:

המשוואה ליניארית מסדר ראשון

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$\text{פתרון: } y = \left[C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right] e^{-\int p(x) dx}$$

$$\sum F = ma \Rightarrow mg - kv = m\dot{v} \Rightarrow \dot{v} + \frac{k}{m}v = g$$

$$P(t) = \frac{k}{m}, \quad Q(t) = g$$

$$v(t) = \left[C + g \int e^{\frac{k}{m} \int dt} dt \right] e^{-\frac{k}{m} \int dt}$$

$$v(t) = \left[C + g \int e^{\frac{k}{m}t} dt \right] e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(t) = \left[C + \frac{mg}{k} e^{\frac{k}{m}t} \right] e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(t) = C e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow 0 = C + \frac{mg}{k} \Rightarrow C = -\frac{mg}{k}$$

$$v(t) = -\frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \Rightarrow v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

הגדל $k \rightarrow 0$ נותן גודל $a = g$

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = g \Rightarrow k \rightarrow 0: \dot{v} = g \Rightarrow a = g \text{ (free fall)}$$