

$$y'' + y' + 4y = 2 \sinh x \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{aligned}$$

משאלה ז' סדר II:

הפתרון הכללי של מש' ז' סדר II הוא משפחה של פונקציות ליניאריות.

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

מש' ז' סדר II משוואה מסדר II עם מקדמים קבועים:

3 דרכים להשיג את הפתרון הכללי:
1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$: נקבל y_1, y_2

1. במקרה הכללי ההומוגנלי:

$$\begin{aligned} y_h &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_1 \neq \lambda_2 & \text{מקרה א'} \\ y_h &= c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} & \lambda_1 = \lambda_2 & \text{מקרה ב'} \\ y_h &= e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) & \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta & \text{מקרה ג'} \end{aligned}$$

$$y'' + y' + 4y = e^x - e^{-x}$$

המשוואה האופיינית:

$$\lambda^2 + \lambda + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = -15 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{15}i$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \Rightarrow y_h = e^{-0.5x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{15}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{15}}{2} x \right)$$

2. הזרוע הומוגנלית:

$$(\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2) \quad y_p = a e^{\alpha x} \quad \text{אם } Q(x) = e^{\alpha x}$$

$$Q(x) = e^x - e^{-x} \Rightarrow y_p = a e^x + b e^{-x}$$

נכלול גם פתרונות מסוג y_p של המשוואה הליניארית הומוגנית.
 y_p של המשוואה הליניארית הומוגנית נכלול גם פתרונות מסוג y_p של המשוואה הליניארית הומוגנית.

$$y_p = ae^x + be^{-x} \Rightarrow y_p' = ae^x - be^{-x} \Rightarrow y_p'' = ae^x + be^{-x}$$

$$y_p'' + y_p' + 4y_p = e^x - e^{-x}$$

$$ae^x + be^{-x} + ae^x - be^{-x} + 4(ae^x + be^{-x}) = e^x - e^{-x}$$

$$6ae^x + 4be^{-x} = e^x - e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 1 \\ 4b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/6 \\ b = -1/4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{6}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} \Rightarrow y_p = \frac{1}{12}(2e^x - 3e^{-x})$$

$$y = y_h + y_p \Rightarrow$$

$$y = e^{-0.5x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{15}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{15}}{2}x \right) + \frac{1}{12}(2e^x - 3e^{-x})$$