

$$y'' + 2y' + y = e^x \cos x \quad (6)$$

$$(y^* = Ae^x(B \sin x + C \cos x) : \text{כאשר } y^* \text{ פתרון פרטי})$$

השאלה דיון על סדר II:

הפתרון הכללי של משוואה דיפרנציאלית מסדר II הוא השכיחה של עקמוניות הליניאריות.

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

משוואה דיפרנציאלית מסדר II עם מקדמים קבועים:

דיסקרימיננטה
המשוואה $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
הפתרון λ_1, λ_2

1. פתרון הכללי

$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$	הפתרון הכללי	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	<u>מקרה 1</u>
$y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$	"	$\lambda_1 = \lambda_2$	<u>מקרה 2</u>
$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$	"	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	<u>מקרה 3</u>

$$y'' + 2y' + y = e^x \cos x$$

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \Rightarrow y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$$Q(x) = e^x \cos x \quad \Rightarrow \quad y_p = Ae^x(B \sin x + C \cos x) \quad \leftarrow \text{given}$$

$(\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2) \quad y_p = ae^{\alpha x}$
 $y_p = x^s R_m(x) e^{\alpha x}$

$\cos x$ אינו פולינום ($p_m(x)$) כך שלא ניתן להשתמש כאן בפרוצדורה הנתונה בדף
 הנוסחאות כדי למצוא את הפתרון הפרטי. משום כך קיבלנו אותו כנתון.
 עם זאת קל להבחין שהוא בעצם מכפלה של הפתרונות המתאימים ל- e^x ול- $\cos x$.

כדי למצוא את הפתרונות של y_p נשתמש ב- e^x ו- $\cos x$ כפולינומים.
 הפולינום (הוא הולנומי) אינו פולינום רגיל, אלא פולינום טריגונומי.

$$y_p = Ae^x(B \sin x + C \cos x) \quad \Rightarrow$$

$$y_p' = Ae^x(B \sin x + C \cos x) + Ae^x(B \cos x - C \sin x) \quad \Rightarrow \quad y_p' = Ae^x[(B - C) \sin x + (B + C) \cos x]$$

$$y_p'' = Ae^x[(B - C) \sin x + (B + C) \cos x] + Ae^x[(B - C) \cos x - (B + C) \sin x] \quad \Rightarrow$$

$$y_p'' = Ae^x[-2C \sin x + 2B \cos x]$$

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = e^x \cos x \quad \Rightarrow$$

$$Ae^x[-2C \sin x + 2B \cos x] + 2Ae^x[(B - C) \sin x + (B + C) \cos x] + Ae^x(B \sin x + C \cos x) = e^x \cos x$$

$$\Rightarrow Ae^x[(3B - 4C) \sin x + (4B + 3C) \cos x] = e^x \cos x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 3B - 4C = 0 \\ 4B + 3C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12B - 16C = 0 \\ -12B - 9C = -3 \end{cases} \Rightarrow 25C = 3 \Rightarrow C = \frac{3}{25}, B = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow y_p = e^x \left(\frac{4}{25} \sin x + \frac{3}{25} \cos x \right) \Rightarrow y_p = \frac{1}{25} e^x (4 \sin x + 3 \cos x)$$

הפתרון הכללי:

$$y = y_h + y_p \quad \Rightarrow$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{25} e^x (4 \sin x + 3 \cos x)$$