

$$y'' + 4y = x^2 + 3e^x$$

(5)

משאלה דים' של סדר II:

הפתרון הכללי של מש' דים' של סדר II הוא משפחה של פונקציות הכוללות
מש' פרטיות

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

מש' דים' אינלוגר מסדר II עם מקדמים קבועים:

דיקור המש' האנליטית:
נקבל λ_1, λ_2

1. פתרון המש' ההומוגנלית

$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$	הומוגנלית	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	<u>מקרה 1</u>
$y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$	"	$\lambda_1 = \lambda_2$	<u>מקרה 2</u>
$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$	"	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	<u>מקרה 3</u>

$$y'' + 4y = x^2 + 3e^x$$

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm 2i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 2$$

$$y_h = e^{0 \cdot x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \Rightarrow$$

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$Q(x) = x^2 + 3e^x$$

$(\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2) \quad y_p = a e^{\alpha x}$: $Q(x) = e^{\alpha x}$ $\alpha \neq 0$
 $y_p = x^s R_m(x) e^{\alpha x}$: " " " " $Q(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$ " "
 $(\alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2)$: האלמנטים α של $s=0$
 $(\alpha = \lambda_1 \text{ או } \alpha = \lambda_2)$: האלמנטים α של $s=1$
 $(\alpha = \lambda_1 = \lambda_2)$: " " " $s=2$
 $P_m(x)$: $R_m(x)$:
 $R_m(x) = ax + b$: $P_m(x) = x$:
 $R_m(x) = ax^2 + bx + c$: $P_m(x) = x^2 + 2$:

$$\begin{cases} Q_1(x) = x^2 \cdot e^{0 \cdot x}, & \alpha = 0 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow s = 0 \Rightarrow y_{p1} = x^0(ax^2 + bx + c)e^{0 \cdot x} \\ Q_2(x) = 3e^{1 \cdot x}, & \alpha = 1 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow s = 0 \Rightarrow y_{p2} = x^0(de^x)e^{0 \cdot x} \end{cases}$$

$$y_p = ax^2 + bx + c + de^x$$

כדי למצוא את המקדמים a, b, c, d של y_p נציב את y_p בפרטית ונשווה מקדמים.
 נקבל: $y_p'' + 4y_p = x^2 + 3e^x$

$$\begin{aligned} y_p &= ax^2 + bx + c + de^x \Rightarrow y_p' = 2ax + b + de^x \Rightarrow y_p'' = 2a + de^x \\ y_p'' + 4y_p &= x^2 + 3e^x \Rightarrow 2a + de^x + 4(ax^2 + bx + c + de^x) = x^2 + 3e^x \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5de^x + 4ax^2 + 4bx + 2a + 4c = x^2 + 3e^x \Rightarrow \begin{cases} 5d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{5} \\ 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}, \quad b = 0 \\ 2a + 4c = 0 \Rightarrow c = -\frac{a}{2} = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{4}x^2 + 0 \cdot x - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x \Rightarrow y_p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x$$

$$y = y_h + y_p \Rightarrow$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{5}e^x - \frac{1}{8}$$