

5. משוואה דיפרנציאלית לא ליניארית מסדר ראשון

יש לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית, $y = 3xy' + 6y^2y'^2$ רמז: ניתן להכפיל ב- y^2 ולסמן $V = y^3$

פתרון:

$$y = 3xy' + 6y^2y'^2 / \cdot y^2 \Rightarrow y^3 = 3xy^2y' + 6y^4y'^2$$

$$V = y^3, \quad \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = V' = 3y^2y' \Rightarrow V'^2 = 9y^4y'^2$$

$$y^3 = x \cdot 3y^2y' + 6y^4y'^2 \Rightarrow V = xV' + \frac{2}{3}V'^2$$

ה' ג' ל' ו' :

$$y = xy' + \varphi(y')$$

$$\begin{cases} y = cx + \varphi(c) \\ y' = -c \cdot \varphi'(c) + \varphi'(c) \\ x = -\varphi'(c) \end{cases}$$

ה' ג' ל' ו' :
ה' ג' ל' ו' :
ה' ג' ל' ו' :

$$V = xV' + \frac{2}{3}V'^2 \rightarrow \varphi(V') = \frac{2}{3}V'^2 \Rightarrow \varphi(c) = \frac{2}{3}c^2, \quad \varphi'(c) = \frac{4}{3}c \Rightarrow \varphi'(P) = \frac{4}{3}P$$

הפתרון הכללי:

$$V = Cx + \varphi(C) \Rightarrow V = Cx + \frac{2}{3}C^2 \Rightarrow y^3 = Cx + \frac{2}{3}C^2$$

הפתרון הסינגולרי:

$$\begin{cases} V = -P\varphi'(P) + \varphi(P) \Rightarrow V = -\frac{4}{3}P^2 + \frac{2}{3}P^2 \Rightarrow V = -\frac{2}{3}P^2 \Rightarrow V = -\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16}x^2 \\ x = -\varphi'(P) \Rightarrow x = -\frac{4}{3}P \Rightarrow x^2 = \frac{16}{9}P^2 \Rightarrow P^2 = \frac{9}{16}x^2 \end{cases}$$

$$V = -\frac{3}{8}x^2 \Rightarrow y^3 = -\frac{3}{8}x^2$$

הפתרון הכללי של המשוואה הוא משפחה של עקומות אשר תלויות בפרמטר אחד - C

$$y_{(x)}^3 = Cx + \frac{2}{3}C^2$$

שש מהן מופיעות באיור מימין עבור שישה ערכי C שונים: -3, -2, -1, 1, 2, 3

הפתרון הפרטי של המשוואה הוא הפונקציה

$$y_{(x)}^3 = -\frac{3}{8}x^2$$

כל אחת מאינסוף העקומות שבמשפחת הפתרון הכללי משיקה לעקומת הפתרון הפרטי הזה בנקודה אחרת.

נהוג לכן לומר שהפתרון הפרטי מהווה מעטפת (envelope) לפתרון הכללי.

