

$$\begin{cases} y'' = z \\ z'' = y \end{cases} \quad \text{עליך לפתור את מערכת המשוואות}$$

פתרון:

$$\begin{cases} y'' = z \\ z'' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'' = y^{(4)} \\ z'' = y \end{cases} \Rightarrow y^{(4)} = y \Rightarrow y^{(4)} - y = 0$$

השאלה היא: כיצד נמצא את הפתרונות הכלליים?

הפתרון הכללי של מערכת זו הוא שכיף של y ושל z שיהיו פונקציות של x .

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

השאלה היא: כיצד נמצא את הפתרונות הכלליים?
נניח $y = e^{\lambda x}$ ונציב במשוואה:
 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
הפתרון הוא: λ_1, λ_2

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$$

$$y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

הפתרון הכללי של מערכת זו הוא שכיף של y ושל z שיהיו פונקציות של x .

1. במקרה $\lambda_1 \neq \lambda_2$
2. במקרה $\lambda_1 = \lambda_2$
3. במקרה $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$y^{(4)} - y = 0, \quad Q(x) = 0 \Rightarrow \text{Homogeneous}$$

משוואה זו היא אומנם מסדר IV, אך המשוואה האופיינית שלה ($\lambda^4 - 1 = 0$) ניתנת להצגה כמכפלה של שתי משוואות אופייניות מסדר II שלכל אחת פתרון (הומוגני) משלה. בזכות היות המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה הומוגנית ובזכות העובדה שלשתי המשוואות האופייניות מסדר II אין שורשים משותפים, סכום הפתרונות האלה הוא הפתרון (ההומוגני וגם הכללי) של המשוואה הנתונה.

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,4} = 0 \pm i$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y_1 = y_{h1} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$$

$$\lambda_{3,4} = 0 \pm 1i \Rightarrow \alpha = 0, \quad \beta = 1 \Rightarrow y_2 = y_{h2} = C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$y(x) = y_1 + y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x - C_3 \sin x + C_4 \cos x$$

$$z = y''(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$