

עליך לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה $\ddot{y} + y = F(t)$ כאשר
$$F(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{\pi^2} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

משוואה זו מתארת תנודה בעת ירי (y הוא העתק התנודה אחורה/קדימה), כתלות בזמן. התנודה מחובר לקפיצי שיכוד מסיביים שעליהם פועל כתוצאה מהדף הירי כוח מאלץ $F(t)$ לפרק זמן של π מיקרו-שניות. בתרגיל זה, לשם הפשטות, נדונה מערכת לא-מרוסנת (המקדם של $\dot{y}$ שווה ל-0). בנוסף, נקבעו קבוע הקפיץ ומסת התנודה לערך של יחידה אחת. במציאות, המערכת מרוסנת (המקדם של $\dot{y}$ שונה מ-0) כדי להיות מוכנה לירי הבא. בהתחלה התנודה במנוחה.

פתרון:

$$\ddot{y} + 0\dot{y} + y = F(t)$$

משוואה דיפרנציאלית מסדר II
הפתרון הכללי של משוואה דיפרנציאלית מסדר II הוא שכיפה של משוואה הומוגנית.
משוואה דיפרנציאלית מסדר II מסוג מסוג II
 $y'' + ay' + by = Q(x)$
 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
זכור: המשוואה הדיפרנציאלית מסדר II מסוג II מסוג II
מקבלת פתרון כללי
1. במקרה $\lambda_1 \neq \lambda_2$ הפתרון הכללי הוא
 $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
2. במקרה $\lambda_1 = \lambda_2$ הפתרון הכללי הוא
 $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$
3. במקרה $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ הפתרון הכללי הוא
 $y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$$

$$y_h = e^{0t} (C_1 \cos 1t + C_2 \sin 1t) \Rightarrow y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

כאשר $t < \pi$, $F(t) = 0$ ואז המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה היא הומוגנית:

$$\ddot{y} + 0\dot{y} + y = 0$$

פתרונה הכללי יהיה לכן הפתרון ההומוגני y_h שקיבלנו לעיל, ז"א:

$$y = y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

כאשר $0 \leq t \leq \pi$, $F(t) \neq 0$ ולכן עבור פרק זמן זה יהא עלינו לחפש פתרון פרטי מתאים שאותו נוסיף לפתרון ההומוגני.

בכך נעסוק בעמוד הבא.

$(\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2) y_p = a e^{\alpha x}$: 2/3 נר 'ס' 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר $Q(x) = e^{\alpha x}$ נר
 $y_p = X^s R_m(x) e^{\alpha x}$: " " " " $Q(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$ "
 $(\alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2)$ נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר $s=0$
 $(\alpha = \lambda_2 \text{ ו/או } \alpha = \lambda_1)$ נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר $s=1$
 $(\alpha = \lambda_1 = \lambda_2)$ " 2/3 " " 2/3 " $s=2$
 $P_m(x)$ נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר $R_m(x)$
 $R_m(x) = ax+b$ נר $P_m(x) = x$ נר, נר
 $R_m(x) = ax^2+bx+c$ " $P_m(x) = x^2+2$ "

$$Q(t) = \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2}\right) \cdot e^{0 \cdot t}, \quad \alpha = 0 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow s = 0 \Rightarrow y_p = t^0 (at^2 + bt + c) e^{0 \cdot t}$$

נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר y_p נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר
 נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר y_p נר 2/3 נר 2/3 נר 2/3 נר

$$y_p = at^2 + bt + c \Rightarrow \dot{y}_p = 2at + b \Rightarrow \ddot{y}_p = 2a$$

$$\ddot{y}_p + 0\dot{y}_p + y_p = 1 - \frac{t^2}{\pi^2} \Rightarrow$$

$$2a + at^2 + bt + c = 1 - \frac{t^2}{\pi^2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/\pi^2 \\ b = 0 \\ 2a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 1 + 2/\pi^2$$

$$y_p = -\frac{1}{\pi^2} t^2 + 0t + 1 + 2/\pi^2$$

$$y = y_h + y_p$$

$$0 \leq t \leq \pi \text{ עבור } \text{כללי}$$

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t^2}{\pi^2} + 1 + \frac{2}{\pi^2}$$

$$y = y_h$$

$$\pi < t \text{ עבור } \text{כללי}$$

$$y(t) = C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

תנאי ההתחלה בשני פרקי הזמן הנ"ל אינם זהים ולכן ערכי הפרמטרים שבפתרון השני (C_3, C_4) יהיו שונים מאלה שבפתרון הראשון (C_1, C_2) . בהמשך ניקח זאת בחשבון כשנחשב את ערכי הפרמטרים האלה.

כתוב בשאלה שבהתחלה התותח במנוחה, ז"א מהירותו אז היא $\dot{y}_{(0)} = 0$. העתקו אז גם הוא $y_{(0)} = 0$ מן הסתם.
 בשל רציפות פונקציות המקום והמהירות (מקום ומהירות אינם משתנים באפס זמן), מתקיים $y_{(\pi^+)} = y_{(\pi)}$ ו- $\dot{y}_{(\pi^+)} = \dot{y}_{(\pi)}$

$$\underline{0 \leq t \leq \pi}$$

$$y_{(t)} = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t^2}{\pi^2} + 1 + \frac{2}{\pi^2}$$

$$y_{(0)} = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \frac{0^2}{\pi^2} + 1 + \frac{2}{\pi^2} \Rightarrow 0 = C_1 + 1 + \frac{2}{\pi^2} \Rightarrow C_1 = -\left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right)$$

$$y_{(t)} = -\left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) \cos t + C_2 \sin t - \frac{t^2}{\pi^2} + 1 + \frac{2}{\pi^2} = \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right)(1 - \cos t) + C_2 \sin t - \frac{t^2}{\pi^2}$$

$$\dot{y}_{(t)} = \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) \sin t + C_2 \cos t - \frac{2t}{\pi^2}$$

$$\dot{y}_{(0)} = 0 \Rightarrow 0 = \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) \sin 0 + C_2 \cos 0 - \frac{2 \cdot 0}{\pi^2} \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y_{(t)} = \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right)(1 - \cos t) - \frac{t^2}{\pi^2} \Rightarrow y_{(\pi)} = \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) \cdot (1 - \cos \pi) - \frac{\pi^2}{\pi^2} = \frac{4}{\pi^2} + 1$$

$$\dot{y}_{(t)} = \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) \sin t - \frac{2t}{\pi^2} \Rightarrow \dot{y}_{(\pi)} = \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) \cdot \sin \pi - \frac{2\pi}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\underline{\pi < t}$$

$$y_{(t)} = C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

$$y_{(\pi^+)} = y_{(\pi)} = \frac{4}{\pi^2} + 1 \Rightarrow \frac{4}{\pi^2} + 1 = C_3 \cos \pi^+ + C_4 \cdot \sin \pi^+ \Rightarrow C_3 = -\left(\frac{4}{\pi^2} + 1\right)$$

$$y_{(t)} = -\left(\frac{4}{\pi^2} + 1\right) \cos t + C_4 \sin t$$

$$\dot{y}_{(t)} = \left(\frac{4}{\pi^2} + 1\right) \sin t + C_4 \cos t$$

$$\dot{y}_{(\pi^+)} = \dot{y}_{(\pi)} = -\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\frac{2}{\pi} = \left(\frac{4}{\pi^2} + 1\right) \sin \pi^+ + C_4 \cos \pi^+ \Rightarrow C_4 = \frac{2}{\pi}$$

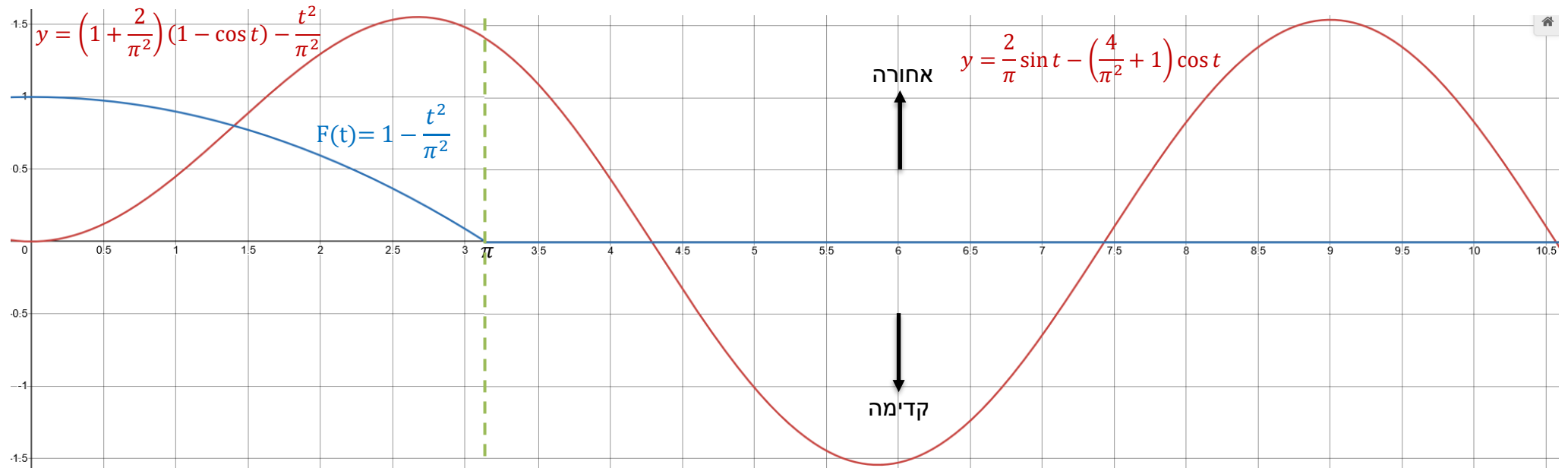
$$y_{(t)} = -\left(\frac{4}{\pi^2} + 1\right) \cos t + \frac{2}{\pi} \sin t$$

לסיכום

$$\ddot{y} + y = F(t)$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{\pi^2} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases} \rightarrow y_{(t)} = \begin{cases} \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right)(1 - \cos t) - \frac{t^2}{\pi^2} & 0 \leq t \leq \pi \\ \frac{2}{\pi} \sin t - \left(\frac{4}{\pi^2} + 1\right) \cos t & \pi < t \end{cases}$$

בכחול: כוח ההדף כפונקציה של הזמן (במיקרו-שניות) - מתחיל חזק אחורנית ודועך פרבולית לאפס במשך π מיקרו-שניות.
באדום: העתק קנה התותח (אחורה וקדימה) כפונקציה של הזמן (במיקרו-שניות) - מתחיל בתנועה אחורנית וממשיך בתנודה סינוסואידלית לא מרוסנת (ז"א לא דועכת).



עבור $t < \pi$ מתנוודד קנה התותח אחורה וקדימה לנצח, מפני שאינו מרוסן (הנגזרת הראשונה אינה מופיעה במשוואה הדיפרנציאלית).