

עליך לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה $\ddot{y} + y = F(t)$ כאשר $F(t) = \begin{cases} 1 - t^3 & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$

משוואה זו מתארת תנודה בעת ירי (ע הוא העתק התנודה אחורה/קדימה), כתלות בזמן. התנודה מחובר לקפיצי שיכוד מסיביים שעליהם פועל כתוצאה מהדף הירי כוח מאלץ $F(t)$ לפרק זמן של π מיקרו-שניות. בתרגיל זה, לשם הפשטות, נדונה מערכת לא-מרוסנת (המקדם של $\ddot{y}$ שווה ל-0). בנוסף, נקבעו קבוע הקפיץ ומסת התנודה לערך של יחידה אחת. במציאות, המערכת מרוסנת (המקדם של $\ddot{y}$ שונה מ-0) כדי להיות מוכנה לירי הבא. בהתחלה התנודה במנוחה.

פתרון:

$$\ddot{y} + 0\dot{y} + y = F(t)$$

משוואה דיפרנציאלית מסדר II:

הפתרון הכללי של משוואה דיפרנציאלית מסדר II הוא משפחה של פונקציות טריגונומטריות.

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

משוואה דיפרנציאלית מסדר II עם מקדמים קבועים:
צריך להחליט האם יש שתי שורשים שונים, שני שורשים שווים או שורש זוגי (מרוסנת).

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

החלטה על $\lambda_1 \neq \lambda_2$ פתרון הכללי

" $\lambda_1 = \lambda_2$

" $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (מרוסנת)

1. פתרון הכללי

מקרה א'

מקרה ב'

מקרה ג'

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$$

$$y_h = e^{0t} (C_1 \cos 1t + C_2 \sin 1t) \Rightarrow y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

כאשר $F(t) = 0$, $\pi \leq t$ ואז המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה היא הומוגנית:

$$\ddot{y} + 0\dot{y} + y = 0$$

פתרונה הכללי יהיה לכן הפתרון ההומוגני y_h שקיבלנו לעיל, ז"א:

$$y = y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

כאשר $0 \leq t < \pi$, $F(t) \neq 0$ ולכן עבור פרק זמן זה יהא עלינו לחפש פתרון פרטי מתאים שאותו נוסיף לפתרון ההומוגני.

בכך נעסוק בעמוד הבא.

$(\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2) y_p = a e^{\alpha x}$ $\alpha(x) = e^{\alpha x}$ $s=0$
 $y_p = x^s R_m(x) e^{\alpha x}$ $\alpha(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$ $s=1$
 $(\alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2)$ $s=2$
 $(\alpha = \lambda_2 \neq \lambda_1)$ $s=1$
 $(\alpha = \lambda_1 = \lambda_2)$ $s=2$

$P_m(x)$ $R_m(x)$
 $R_m(x) = ax + b$ $P_m(x) = x$
 $R_m(x) = ax^2 + bx + c$ $P_m(x) = x^2 + 2$

$$Q(t) = (1 - t^3) \cdot e^{0 \cdot t}, \alpha = 0 \neq \lambda_{1,2} \Rightarrow s = 0 \Rightarrow y_p = t^0 (at^3 + bt^2 + ct + d) e^{0 \cdot t}$$

כדי למצוא את המקדמים של y_p נשווה את המקדמים של y_p ו- $Q(t)$.
 הכפילים (הולד) (הוא/היא) נשאלת/נשאל מה המקדמים של y_p .

$$y_p = at^3 + bt^2 + ct + d \Rightarrow \dot{y}_p = 3at^2 + 2bt + c \Rightarrow \ddot{y}_p = 6at + 2b$$

$$\ddot{y}_p + 0\dot{y}_p + y_p = 1 - t^3 \Rightarrow 6at + 2b + at^3 + bt^2 + ct + d = 1 - t^3$$

$$at^3 + bt^2 + (6a + c)t + 2b + d = 1 - t^3 \Rightarrow b = 0, \begin{cases} a = -1 \\ 6a + c = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$y_p = -t^3 + 0t^2 + 6t + 1$$

$$y = y_h + y_p$$

$$0 \leq t < \pi \text{ עבור כל } t$$

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t^3 + 6t + 1$$

$$y = y_h$$

$$\pi \leq t < 2\pi \text{ עבור כל } t$$

$$y(t) = C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

תנאי ההתחלה בשני פרקי הזמן הנ"ל אינם זהים ולכן ערכי הפרמטרים שבפתרון השני (C_3, C_4) יהיו שונים מאלה שבפתרון הראשון (C_1, C_2). בהמשך ניקח זאת בחשבון כשנחשב את ערכי הפרמטרים האלה.

כתוב בשאלה שבהתחלה התותח במנוחה, ז"א מהירותו אז היא $\dot{y}(0) = 0$. העתקו אז גם הוא $y(0) = 0$ מן הסתם.
 בשל רציפות פונקציות המקום והמהירות (מקום ומהירות אינם משתנים באפס זמן), מתקיים $y(\pi) = y(\pi^-)$ ו- $\dot{y}(\pi) = \dot{y}(\pi^-)$.

$$\underline{0 \leq t < \pi}$$

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t^3 + 6t + 1$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - 0 + 0 + 1 \Rightarrow 0 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = -1$$

$$y(t) = -\cos t + C_2 \sin t - t^3 + 6t + 1$$

$$\dot{y}(t) = \sin t + C_2 \cos t - 3t^2 + 6$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow 0 = \sin 0 + C_2 \cos 0 + 6 \Rightarrow C_2 = -6$$

$$y(t) = -\cos t - 6 \sin t - t^3 + 6t + 1 \quad y(\pi^-) = -\cos \pi^- - 6 \sin \pi^- - (\pi^-)^3 + 6\pi^- + 1 = 2 - \pi^3 + 6\pi$$

$$\dot{y}(t) = \sin t - 6 \cos t - 3t^2 + 6 \quad \dot{y}(\pi^-) = \sin \pi^- - 6 \cos \pi^- - 3(\pi^-)^2 + 6 = 12 - 3\pi^2$$

$$\underline{\pi \leq t}$$

$$y(t) = C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

$$y(\pi) = y(\pi^-) = 2 - \pi^3 + 6\pi \Rightarrow 2 - \pi^3 + 6\pi = C_3 \cos \pi + C_4 \cdot \sin \pi \Rightarrow C_3 = \pi^3 - 6\pi - 2$$

$$y(t) = (\pi^3 - 6\pi - 2) \cos t + C_4 \sin t$$

$$\dot{y}(t) = -(\pi^3 - 6\pi - 2) \sin t + C_4 \cos t$$

$$\dot{y}(\pi) = \dot{y}(\pi^-) = 12 - 3\pi^2 \Rightarrow 12 - 3\pi^2 = -(\pi^3 - 6\pi - 2) \sin \pi + C_4 \cos \pi \Rightarrow C_4 = 3\pi^2 - 12$$

$$y(t) = (\pi^3 - 6\pi - 2) \cos t + 3(\pi^2 - 4) \sin t$$

לסיכום

$$\ddot{y} + y = F(t)$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - t^3 & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases} \rightarrow y(t) = \begin{cases} -\cos t - 6 \sin t - t^3 + 6t + 1 & 0 \leq t < \pi \\ (\pi^3 - 6\pi - 2) \cos t + 3(\pi^2 - 4) \sin t & \pi \leq t \end{cases}$$