

יש לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה $x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x)$

פתרון:

$ax^2 y'' + bxy' + cy = Q(x)$
 $a\ddot{y} + (b-a)\dot{y} + cy = Q(e^t)$ השאלה על סדר II:
 נבחר $x = e^t$ נ"ב
 וקבלנו מש' ב' עם מקדמים קבועים

$1 \cdot x^2 y'' + 0 \cdot xy' - 2 \cdot y = \sin(\ln x) \rightarrow \ddot{y} - \dot{y} - 2y = \sin(\ln e^t) = \sin t$

השאלה ב' על סדר II: השאלה על סדר II:
 הפתרון הכללי של מש' ב' על סדר II הוא משפחה של פונקציות הרמוניות
 שני פרמטרים

$y'' + ay' + by = Q(x)$
 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ מש' ב' ל'טענה מסדר II עם מקדמים קבועים:
 ד"ר המ' האלגוריתם!
 מקבל λ_1, λ_2

1. פתרון המש' ההומוגנית: 1. פתרון המש' ההומוגנית:
 $y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ מקרה א' $\lambda_1 \neq \lambda_2$ פתרון המש' ההומוגנית
 $y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$ מקרה ב' $\lambda_1 = \lambda_2$ "
 $y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ מקרה ג' $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ "

$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = \sin t$

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$

$$Q(t) = \sin t$$

$$y_p = a \sin x + b \cos x \quad \text{כאשר} \quad Q(x) = \sin x, \cos x$$

כדי למצוא את המקדמים של y_p נציב את y_p ונגזרתה במשוואה. נקבל מערכת משוואות ליניארית. נפתור אותה ונמצא את a ו- b .

$$y_p = a \sin t + b \cos t \Rightarrow \dot{y}_p = a \cos t - b \sin t \Rightarrow \ddot{y}_p = -a \sin t - b \cos t$$

$$\ddot{y}_p - \dot{y}_p - 2y_p = \sin t$$

$$-a \sin t - b \cos t - a \cos t + b \sin t - 2a \sin t - 2b \cos t = \sin t$$

$$(b - 3a) \sin t - (3b + a) \cos t = \sin t \Rightarrow \begin{cases} b - 3a = 1 \\ 3b + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = \frac{1}{10} \\ a = -\frac{3}{10} \end{matrix}$$

$$y_p = \frac{1}{10} \cos t - \frac{3}{10} \sin t \Rightarrow y_p = \frac{1}{10} (\cos t - 3 \sin t)$$

הפתרון הכללי:

$$y = y_h + y_p \Rightarrow$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{10} (\cos t - 3 \sin t)$$

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

$$y(x) = C_1 e^{-\ln x} + C_2 e^{2 \ln x} + \frac{1}{10} [\cos(\ln x) - 3 \sin(\ln x)]$$

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 + \frac{1}{10} [\cos(\ln x) - 3 \sin(\ln x)]$$