

2. משוואה דיפרנציאלית מסדר שני

יש לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית, $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ (20 נק'), מי הפתרון ההומוגני ומי הפתרון הפרטי? (5 נק')

פתרון:

$$y'' + 0 \cdot y' + y = \frac{1}{\sin x}$$

משאלה זיכר' של סדר II:

הפתרון הכללי של מש' זיכר' של סדר II הוא משפחה של עקמונים הכוללת גם פונקציות

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

מש' זיכר' ל'טענה מסדר II עם מקדמים קבועים:

דיקוק המש' האלמנטרית:
מקרה $\lambda_1 \neq \lambda_2$

1. פתרון המש' הומוגנית:

$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$	הוא/היא	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	פתרון המש'	אנחנו	1
$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$	:	"	"	אנחנו	2
$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$	:	"	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (מרוכבים)	אנחנו	3

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$$

$$y_h = e^{0x} (C_1 \cos 1x + C_2 \sin 1x) \Rightarrow y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

לגבי הפתרון הפרטי, האילוץ הוא $Q(x) = \frac{1}{\sin x}$ ובדף הנוסחאות לא מופיעה צורת פתרון המתאימה לאילוץ כזה. נפנה לכן לשיטת לגרנז', ראה בדף הבא.

הצגת המשוואה הדיפרנציאלית בצורה $y'' + ay' + by = Q(x)$

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & Q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = Q(x) \end{cases}$$

המשוואה הדיפרנציאלית בצורה $y'' + ay' + by = Q(x)$

המשוואה הדיפרנציאלית בצורה $y'' + ay' + by = Q(x)$

המשוואה הדיפרנציאלית בצורה $y'' + ay' + by = Q(x)$

$$c_1(x) = \int c_1'(x) dx + \bar{c}_1$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) dx + \bar{c}_2$$

Reminder, the differential equation was: $y'' + 0 \cdot y' + y = \frac{1}{\sin x}$

and the homogeneous solution derived was: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \rightarrow y_1 = \cos x \Rightarrow y_1' = -\sin x, \quad y_2 = \sin x \Rightarrow y_2' = \cos x$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -1 \Rightarrow c_1(x) = -\int dx = -x + \bar{c}_1$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow c_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + \bar{c}_2$$

$$\text{just checking: } \begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \rightarrow -\cos x + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x = 0 & \text{true} \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = Q(x) \rightarrow \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} & \text{true} \end{cases}$$

$$y = C_{1(x)} y_1 + C_{2(x)} y_2 \Rightarrow y = (-x + \bar{c}_1) \cos x + (\ln|\sin x| + \bar{c}_2) \sin x$$

$$y = \underbrace{\bar{c}_1 \cos x + \bar{c}_2 \sin x}_{y_h} + \underbrace{\sin x \ln|\sin x| - x \cos x}_{y_p}$$