

2. משוואה דיפרנציאלית מסדר שני

עליך לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית, $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$. מי הפתרון ההומוגני ומי הפתרון הפרטי?

פתרון:

$$y'' + 0 \cdot y' + y = \frac{1}{\cos x}$$

משאלה דיפרנציאלית מסדר II:

הפתרון הכללי של משוואה דיפרנציאלית מסדר II הוא משכבה של עקומות הכוללות שני פרמטרים.

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

משוואה דיפרנציאלית מסדר II עם מקדמים קבועים:
דיסקרימיננטה Δ של המשוואה $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
מקרה $\Delta > 0$: שני שורשים ממשיים λ_1, λ_2
מקרה $\Delta = 0$: שורש ממשי כפול $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
מקרה $\Delta < 0$: שני שורשים מרוכבים $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

ההואומוגני $\lambda_1 \neq \lambda_2$ פתרון המשוואה

" $\lambda_1 = \lambda_2$

" $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (מרוכבים)

1. פתרון המשוואה ההומוגנית

מקרה א' $\lambda_1 \neq \lambda_2$

מקרה ב' $\lambda_1 = \lambda_2$

מקרה ג' $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

המשוואה האופיינית והפתרון ההומוגני:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$$

$$y_h = e^{0x} (C_1 \cos 1x + C_2 \sin 1x) \Rightarrow y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

לגבי הפתרון הפרטי, האילוץ הוא $Q(x) = \frac{1}{\cos x}$ ובדף הנוסחאות לא מופיעה צורת פתרון המתאימה לאילוץ כזה. נפנה לכן לשיטת לגרנז', ראה בדף הבא.

הצגת משוואת הפרט (פרט) של המערכת

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & Q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

המשוואה החדשה היא: $c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = Q(x)$

המשוואה החדשה היא: $c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = Q(x)$

המשוואה החדשה היא: $c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = Q(x)$

$$c_1(x) = \int c_1'(x) dx + \bar{c}_1$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) dx + \bar{c}_2$$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = Q(x) \end{cases}$$

Reminder, the differential equation was: $y'' + 0 \cdot y' + y = \frac{1}{\cos x}$

and the homogeneous solution derived was: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \rightarrow y_1 = \cos x \Rightarrow y_1' = -\sin x, \quad y_2 = \sin x \Rightarrow y_2' = \cos x$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow c_1(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + \bar{c}_1$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1 \Rightarrow c_2(x) = \int dx = x + \bar{c}_2$$

$$\text{just checking: } \begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \rightarrow -\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = 0 & \text{true} \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = Q(x) \rightarrow -\frac{\sin x}{\cos x} (-\sin x) + 1 \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x} & \text{true} \end{cases}$$

$$y = C_{1(x)} y_1 + C_{2(x)} y_2 \Rightarrow y = (\ln|\cos x| + \bar{c}_1) \cos x + (x + \bar{c}_2) \sin x$$

$$y = \underbrace{\bar{c}_1 \cos x + \bar{c}_2 \sin x}_{y_h} + \underbrace{\cos x \ln|\cos x| + x \sin x}_{y_p}$$