2. <u>משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון</u>

יש לפתור את המשוואה הדיפ׳ הבאה, $(yx + 5x^2)y' = 2y^2 + 3x^2 + x^2y'$.

פתרון:

$$(yx + 4x^2)y' = 2y^2 + 3x^2 \quad => \quad (yx + 4x^2)\frac{dy}{dx} = 2y^2 + 3x^2 \quad =>$$

$$=> \quad (yx + 4x^2)dy - (2y^2 + 3x^2)dx = 0 \qquad =>$$

$$(2y^2 + 3x^2)dx - (yx + 4x^2)dy = 0 \qquad \leftarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \quad => \quad not\ exact$$

$$\begin{cases} P_{(x,y)} = 2y^2 + 3x^2 \quad \rightarrow \quad P_{(tx,ty)} = 2t^2y^2 + 3t^2x^2 = t^2(2y^2 + 3x^2) = t^2P_{(x,y)} \\ Q_{(x,y)} = yx + 4x^2 \quad \rightarrow \quad Q_{(tx,ty)} = t^2yx + 4t^2x^2 = t^2(yx + 4x^2) = t^2Q_{(x,y)} \end{cases}$$

$$P(x,y)\,dx - Q(x,y)\,dy = 0$$

<u>מש׳ דיפ׳ הומוגנית:</u>

נקראת הומוגנית אם P ו Q הומוגניות מאותה מעלה.

$$P(tx, ty) = t^{\overset{\text{מעלה}}{n}} P(x,y)$$

$$F(z) = \frac{P(1,z)}{Q(1,z)} \quad , \quad z = y/x$$

הפתרון :
$$\int \frac{dz}{F(z) - z} = \ln xc$$

$$\begin{cases} P_{(1,z)} = 2z^2 + 3 \\ Q_{(1,z)} = z + 4 \end{cases} \quad => \quad F_{(z)} = \frac{P_{(1,z)}}{Q_{(1,z)}} = \frac{2z^2 + 3}{z + 4}$$

$$F_{(z)} - z = \frac{2z^2+3}{z+4} - z = \frac{z^2-4z+3}{z+4} = \frac{(z-3)(z-1)}{z+4}$$

$$\frac{1}{F_{(z)} - z} = \frac{z + 4}{(z - 3)(z - 1)}$$

$$\frac{z + 4}{(z - 3)(z - 1)} = \frac{A}{z - 3} + \frac{B}{z - 1} = \frac{(A + B)z - A - 3B}{(z - 3)(z - 1)} \quad => \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ -A - 3B = 4 \end{cases}$$

$$-2B = 5 \quad => \quad \begin{cases} A = 7/2 \\ B = -5/2 \end{cases} \quad => \quad \frac{z + 4}{(z - 3)(z - 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{z - 3} - \frac{5}{z - 1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{7}{z-3}-\frac{5}{z-1}\right)dz=\ln xc$$

$$\frac{1}{2}[7\ln(z-3)-5\ln(z-1)]=\ln xc$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{(z-3)^7}{(z-1)^5}=\ln xc$$

$$\ln\sqrt{\frac{(z-3)^7}{(z-1)^5}}=\ln xc$$

$$\sqrt{\frac{(z-3)^7}{(z-1)^5}}=xc$$

$$\frac{(z-3)^7}{(z-1)^5}=Cx^2$$

$$\frac{\left(\frac{y}{x}-3\right)^7}{\left(\frac{y}{x}-1\right)^5}=Cx^2$$

$$\frac{(y-3x)^7}{x^2(y-x)^5}=Cx^2$$

$$\frac{(y-3x)^7}{(y-x)^5}=Cx^4$$