

ביה"ס הגבוה ע"ש שנקר

משוואות דיפרנציאליות – מבחן מועד א' קיץ 2024

משך הבחינה: שעתיים וחצי. חומר עזר המותר בשימוש: דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט ומחשבון אישי. יש לענות על ארבע מחמש השאלות הבאות. **בהצלחה.**

1. משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון + מציאת המשוואה הדיפרנציאלית מתוך פתרונה

א. עליך לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{y^2+1}$, כאשר $y(-1) = 1$ 15 נק'.
 ב. מי המשוואה הדיפרנציאלית שפתרונה נתון על ידי $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - 2 \sin x$ 10 נק'.

פתרון א:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{y^2+1} \Rightarrow (y^2+1)dy - (x^2-1)dx = 0$$

$$\int (y^2+1)dy - \int (x^2-1)dx = C \Rightarrow \frac{y^3}{3} + y - \frac{x^3}{3} + x = C_1 \Rightarrow y^3 + 3y - x^3 + 3x = C$$

$$y(-1) = 1 \Rightarrow 1^3 + 3 \cdot 1 - (-1)^3 + 3 \cdot (-1) = C \Rightarrow C = 2$$

$$y^3 + 3y - x^3 - 3x = 2$$

פתרון ב:

Find the differential equation whose solution is: $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - 2 \sin x$

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

ה' ציפ' א'נלטי מוכר II ע'ס מקצ'ם ג'ז'ס'!
 ק'ק' ה'ס' ה'א/ס'נ'מ'!
 נק'ס' λ_1, λ_2

1. ע'ס'ן ה'ס' ה'א/ס'נ'מ'!

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

$$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ע'ס'ן ה'ס' ה'א/ס'נ'מ'!

" $\lambda_1 = \lambda_2$

" $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (מ'ס'ס')

מק'ס' א'!

מק'ס' ב'!

מק'ס' ג'!

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

על פי צורת החלק ההומוגני של הפתרון, מדובר במקרה ב' שבו $\lambda_1 = \lambda_2$. במקרה דנן $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow y'' - 2y' + y = Q(x)$$

כעת למציאת $Q(x)$ (האילוץ):

$$y_p = -2 \sin x \Rightarrow y_p' = -2 \cos x \Rightarrow y_p'' = 2 \sin x$$

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = Q(x) \Rightarrow 2 \sin x - 2(-2 \cos x) - 2 \sin x = Q(x) \Rightarrow 4 \cos x = Q(x)$$

$$y'' - 2y' + y = 4 \cos x$$