

ביה"ס הגבוה ע"ש שנקר

משוואות דיפרנציאליות – מבחן מועד ב' קיץ 2025

משך הבחינה: שעתיים וחצי. חומר עזר המותר בשימוש: דפי נוסחאות שהוכנו על ידי הסטודנט ומחשבון אישי. יש לענות על ארבע מחמש השאלות הבאות. **בהצלחה.**

1. חשיבה כמשוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון

מרוקנים מיכל גלילי אנכי על ידי פתיחת ברז הנמצא בתחתית המיכל. המים יברחו מהר כאשר המיכל מלא אך יאטו עם ירידת גובה המים. מסתבר כי קצב ירידת גובה המים y , יחסי לשורש של גובה המים. עליך לסמן את מקדם היחס על ידי k . מקדם היחס תלוי בקבוע הגרביטציה, הצורה הגיאומטרית של חור הניקוז, הנוזל שבתוך המיכל והיחס שבין שטח החתך של החור לשטח החתך של המיכל. הזמן t , נמדד בדקות. הנח כי $k=1/10$.

א. מהי המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את התרוקנות המיכל? יש להסביר (מי המשתנה התלוי ומי המשתנה הבלתי תלוי, מי מתאר את קצב השינוי, מה סימנו ומדוע) תוך שימוש בהגדרות מתמטיות בלבד (15 נק').
ב. יש לפתור המשוואה הנ"ל ולחשב בתוך כמה זמן יתרוקן המיכל אם עומקם ההתחלתי 9 רגל? יש להסביר (10 נק').

פתרון:

א. גובה המים (y - המשתנה התלוי) פוחת עם הזמן (t - המשתנה הבלתי תלוי) ולכן קצב השינוי שלו $(\frac{dy}{dt})$ שלילי:

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = -k dt$$

ב.

$$2 \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = -k \int t + C \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{y} = -kt + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{(kt - C)^2}{4}$$

$$y(0) = \frac{C^2}{4} \quad \Rightarrow \quad C = 2\sqrt{y_0} \quad y(t) = \frac{(kt - 2\sqrt{y_0})^2}{4}$$

$$k = 0.1, \quad y_0 = 9 \text{ feet} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{(0.1t - 6)^2}{4} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{(t - 60)^2}{400}$$

Now we look for the time when $y(t) = 0$

$$0 = \frac{(t - 60)^2}{400} \quad \Rightarrow \quad t = 60 \text{ min}$$

