

! II 730 Le 'o'2 n kller

הפגזות הנפץ' של מע' צ"פ' של סדר II בא משפחה של ער/מלך הנפץ'.

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$
$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

ע' ציפ' לילד' מן II ע' מ'ג' ג' א' י' ס'

י' ג' ה' ה' א' ב' א' י' ס'

א' ב' א' י' ס'

א' ב' א' י' ס'

1. הצגת הבעיה

$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$	משולש הדיסקרימיננטה	שורשים שונים $\lambda_1 \neq \lambda_2$	1 'ה' נגזרת
$y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$	:	" $\lambda_1 = \lambda_2$	1 'ג' נגזרת
$y_h = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$	:	" (מקרה מיוחד) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	1 '2' נגזרת

2. גלגל פלסטיק / גלגל פלסטיק

$(\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2)$	$y_p = a e^{\alpha x}$	! 2/20/18	! 1/20/18	! 1/20/18	! 1/20/18	$Q(x) = e^{\alpha x}$	$\sim t$
$y_p = x^s R_m(x) e^{\alpha x}$		! "	"	"	"	$Q(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$	"
$(\alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2)$	$\sim 1/20/18$	! 1/20/18	! 1/20/18	! 1/20/18	! 1/20/18	α	$s=0$
$(\alpha = \lambda_2 \text{ if } \alpha = \lambda_1)$	$\sim 1/20/18$	! 1/20/18	! 1/20/18	! 1/20/18	! 1/20/18	α	$s=1$
$(\alpha = \lambda_1 = \lambda_2)$	"	! 1/20/18	"	"	"	α	$s=2$

$P_m(x)$ ist 30. Wert $n=10$ $R_m(x)$

$R_m(x) = ax + b$ sk $P_m(x) = x$ sk, lerp
 $R_m(x) = ax^2 + bx + c$ " $P_m(x) = x^2 + 2$ "

$$y_p = a \sinh x + b \cosh x \quad \text{let} \quad Q(x) = \sinh x, \cosh x \quad \text{let}$$

$$y = y_h + y_p$$

11th Jan 2023, 3

כ' לאלול ה'תשנ"ח
הבית (המלכות) י"א

$$ax^2y'' + bxy' + cy = Q(x) \quad \text{mit } x = e^t$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \delta = \frac{B}{A}$$

intellektuell

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

physikalisch

Wiederholung
: $\frac{1}{2} \pi$ $\frac{1}{2} \pi$ $\frac{1}{2} \pi$
↓ k ↓ m

physikalisch

etc

$$m\ddot{y} + \alpha \dot{y} + ky = 0$$

intellektuell

physikalisch

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta \quad \left(\alpha = \frac{\gamma}{2m}, \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} \right)$$

physikalisch

physikalisch

$$y(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$$

physikalisch $\lambda_1 \neq \lambda_2, \gamma^2 > 4mk$
physikalisch $\gamma > 0$
physikalisch $\alpha > \beta$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\omega^* \quad \left(\omega^* = \frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} \right)$$

$\gamma^2 < 4mk$ physikalisch

$$y(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega^* t + B \sin \omega^* t)$$

physikalisch

physikalisch

$$y(t) = C e^{-\alpha t} \cos(\omega^* t - \delta)$$

etc

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \delta = \frac{B}{A}$$

$$\omega^* \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = (c_1 t + c_2) e^{-\alpha t}$$

physikalisch $\gamma^2 = 4mk$ physikalisch
physikalisch $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$

$$m\ddot{y} + \alpha \dot{y} + ky = r(t)$$

intellektuell

physikalisch

$$F_0 \cos \omega t$$

physikalisch

physikalisch $r(t) = F_0 \cos \omega t$

$$y_p = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

physikalisch

$$r(t) = F_0 \cos \omega t$$

physikalisch

$$a = F_0 \cdot \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad b = F_0 \cdot \frac{\omega \gamma}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

$$y = y_h + y_p$$

physikalisch

$$y_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

physikalisch $b=0, \omega \neq \omega_0$

physikalisch

physikalisch $(\gamma=0)$ physikalisch

$$y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

physikalisch

physikalisch

physikalisch "resonance", $\omega \rightarrow \omega_0$ then $y_p \rightarrow \infty$

physikalisch $\gamma > 0$ physikalisch

$$y_p = D \cos(\omega t - \varphi)$$

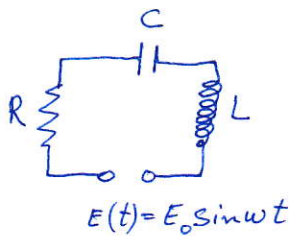
$$D = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\omega \gamma}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \omega} = 0 \rightarrow \omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m}$$

physikalisch D physikalisch

$$D(\omega_{\max}) = \frac{2F_0 m}{\gamma \sqrt{4m^2 \omega_0^2 - \gamma^2}}$$



$$\begin{aligned} L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q &= E_0 \sin \omega t \\ L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}I &= E_0 \sin \omega t \\ L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I &= E_0 \omega \cos \omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= F_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

משוואות דיפרנציאליות

משוואות דיפרנציאליות

משוואות דיפרנציאליות

משוואות דיפרנציאליות

L אינדוקציה

m מסה

R התנגדות

c מקדם התנגדות

$\frac{1}{C}$ קבוע קapacitor

k קבוע הקפיץ

$E_0 \omega \cos \omega t$ כוח חשמלי

$F_0 \cos \omega t$ כוח מכני

I זרם

y הזיזות

$$I_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

נכנסים למערכת

$$(I_p(t) = I_0 \sin(\omega t - \theta)) \quad ik)$$

הזרם יציב, I_0 הוא הזרם הממוצע

$$a = \frac{-E_0 S}{R^2 + S^2}, \quad b = \frac{E_0 R}{R^2 + S^2}$$

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

הזרם החדש

הזרם החדש

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

$$I = I_h + I_p$$

$t \rightarrow \infty$ הזרם יציב (אין α)

הזרם החדש (אין α)

output $I \approx I_p$

(input - α)

הזרם החדש (אין α)

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

הזרם החדש (אין α)

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

הזרם החדש (אין α)

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & Q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

הזרם החדש (אין α)

$$c_1(x) = \int c_1'(x) dx + \bar{c}_1$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) dx + \bar{c}_2$$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = Q(x) \end{cases}$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות

נניח שיש לנו מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, כלומר, $y' = M y + Q(x)$, כאשר M היא מטריצה של מספרים ממשיים או מרוכבים, ו- $Q(x)$ היא וקטור פונקציה. נניח גם ש- y_0 היא תנאי התנע.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}' + M \vec{y} = \vec{Q}$$

מערכת דיפרנציאלית

M מקבלת מטריצה של מספרים.

כאשר, פתרונם של המערכת הומוגנית $\vec{Q} = 0$ מתקבלים מהצורה $y_i = A_i e^{\lambda x}$, כאשר A_i הם קבועים ו- λ הם ערכים עצמיים של מטריצת M . נקרא לזה פתרונות הומוגניים.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda + a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda + a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$\xrightarrow{\text{מקרה}} P_n(\lambda) = 0$

אם λ_i הוא ערך עצמי של M , אז $D(\lambda_i) = 0$. נקרא לזה ערכים עצמיים של M . נניח ש- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ הם ערכים עצמיים שונים של M .

$$\frac{A_1^i}{D_{11}} = \frac{A_2^i}{D_{12}} = \dots = \frac{A_n^i}{D_{1n}} = C_i$$

$\tilde{D}_{11}$ הינו הנורמל של λ_1 ו- $\tilde{D}_{12}$ הינו הנורמל של λ_2 .
 $\tilde{D}_{11}$ הינו הנורמל של λ_1 ו- $\tilde{D}_{12}$ הינו הנורמל של λ_2 .
 C_i מקבלים מהשוואת המקדמים (המשוואות).

פתרון כללי של המערכת הומוגנית:

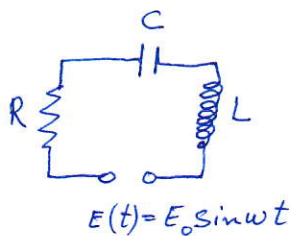
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_2^1 \\ \vdots \\ A_n^1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2 \begin{pmatrix} A_1^2 \\ A_2^2 \\ \vdots \\ A_n^2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n \begin{pmatrix} A_1^n \\ A_2^n \\ \vdots \\ A_n^n \end{pmatrix} e^{\lambda_n x}$$

λ_i ערכים עצמיים של M

פתרון המערכת הומוגנית - כללית (למשל - קו-קו)
 נניח ש- $C_i(x)$ הם פונקציות של x ו- $C(x)$ היא וקטור פונקציה. נניח ש- $C(x)$ היא וקטור פונקציה.

$$\begin{cases} C_1' A_1^1 e^{\lambda_1 x} + C_2' A_1^2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n' A_1^n e^{\lambda_n x} = Q_1 \\ C_1' A_2^1 e^{\lambda_1 x} + C_2' A_2^2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n' A_2^n e^{\lambda_n x} = Q_2 \\ \vdots \\ C_1' A_n^1 e^{\lambda_1 x} + C_2' A_n^2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n' A_n^n e^{\lambda_n x} = Q_n \end{cases}$$

כאשר, C_i הם קבועים, ו- $C(x)$ היא וקטור פונקציה.



$$\begin{aligned} L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q &= E_0 \sin \omega t \\ L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}q &= E_0 \sin \omega t \\ L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I &= E_0 \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

משוואות דיפרנציאליות

משוואות דיפרנציאליות

מכניקה

מכניקה

L אינדוקציה

m מסה

R התנגדות

c מקדם התנגדות

$\frac{1}{C}$ קבוע קapacitor

k קבוע הקפיץ

$E_0 \omega \cos \omega t$ כוח חיצוני

$F_0 \cos \omega t$ כוח חיצוני

I זרם

y הזיזות

$$I_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

הצורה הכללית של הפתרון

$$I_p(t) = I_0 \sin(\omega t - \theta) \quad (ik)$$

הזרם, הפרש זמן, הפרש פאזה

$$a = \frac{-E_0 S}{R^2 + S^2}, \quad b = \frac{E_0 R}{R^2 + S^2}$$

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

הפתרון הכללי

הפתרון הכללי

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

$$I = I_h + I_p$$

כאשר $t \rightarrow \infty$ הזרם יגיע לסטציונרי (הוא ייחל)

הפתרון הכללי, כאשר $t \rightarrow \infty$

output $I \approx I_p$

(input - הזרם)

הצורה הכללית של הפתרון (הצורה הכללית)

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

הפתרון הכללי של המשוואה הומוגנית

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

הפתרון הכללי של המשוואה הומוגנית

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & Q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

הפתרון הכללי של המשוואה הומוגנית

$$c_1(x) = \int c_1'(x) dx + \bar{c}_1$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) dx + \bar{c}_2$$

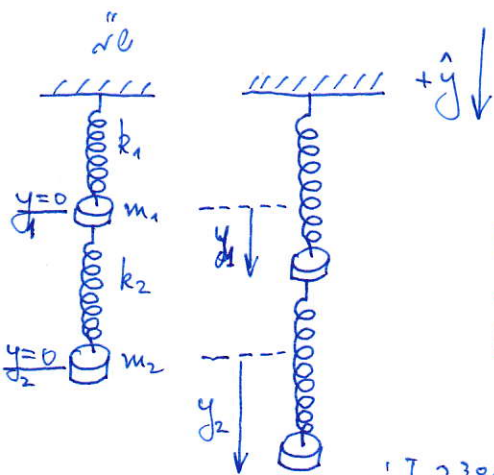
$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = Q(x) \end{cases}$$

$$c'_1(x) = \frac{\begin{bmatrix} A_1^2 e^{\lambda_2 x}, A_1^3 e^{\lambda_3 x} \dots A_1^n e^{\lambda_n x}, Q_1 \\ A_2^2 e^{\lambda_2 x}, A_2^3 e^{\lambda_3 x} \dots A_2^n e^{\lambda_n x}, Q_2 \\ \vdots \\ A_n^2 e^{\lambda_2 x}, A_n^3 e^{\lambda_3 x} \dots A_n^n e^{\lambda_n x}, Q_n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_1^1 e^{\lambda_1 x}, A_1^2 e^{\lambda_2 x}, \dots A_1^n e^{\lambda_n x} \\ A_2^1 e^{\lambda_1 x}, A_2^2 e^{\lambda_2 x}, \dots A_2^n e^{\lambda_n x} \\ \vdots \\ A_n^1 e^{\lambda_1 x}, A_n^2 e^{\lambda_2 x}, \dots A_n^n e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}}$$

לפי c'_1 בפרק 2
 של חלקן של הפרקים
 c'_i בפרק 2

$$\leadsto c_1(x) = \int c'_1(x) dx + \bar{c}_1$$

$$c'_2 = \frac{\begin{bmatrix} A_1^3 e^{\lambda_3 x}, A_1^4 e^{\lambda_4 x} \dots A_1^n e^{\lambda_n x}, Q_1 \\ A_2^3 e^{\lambda_3 x}, A_2^4 e^{\lambda_4 x} \dots A_2^n e^{\lambda_n x}, Q_2 \\ \vdots \\ A_n^3 e^{\lambda_3 x}, A_n^4 e^{\lambda_4 x} \dots A_n^n e^{\lambda_n x}, Q_n \end{bmatrix}}{W} \dots c'_n = \frac{\begin{bmatrix} A_1^{n-1} e^{\lambda_{n-1} x}, Q_1 \\ A_2^{n-1} e^{\lambda_{n-1} x}, Q_2 \\ \vdots \\ A_n^{n-1} e^{\lambda_{n-1} x}, Q_n \end{bmatrix}}{W}$$



לפרק 2/3

פרק 2 - פרק 2 (6)

לפרק 2 של הפרקים

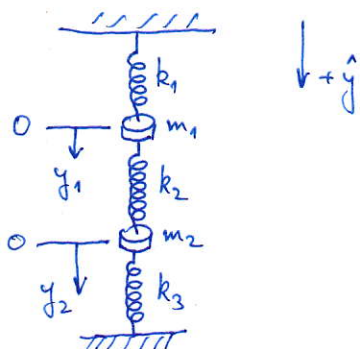
$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 = -k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1) \\ m_2 \ddot{y}_2 = -k_2 (y_2 - y_1) \end{cases}$$

$$\dot{y}_2 = y_4 \quad ; \quad \dot{y}_1 = y_3 \quad \text{לפרק 2}$$

לפרק 2 של הפרקים 4-6 של הפרקים 2-3 של הפרקים

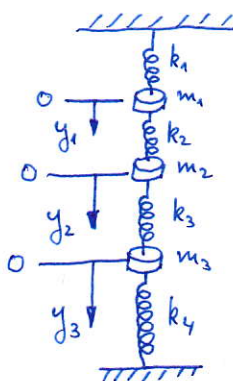
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לפרק 2 של הפרקים
 2-3 של הפרקים
 לפרק 2 של הפרקים
 $y_i = A_i e^{\sqrt{\lambda} x}$



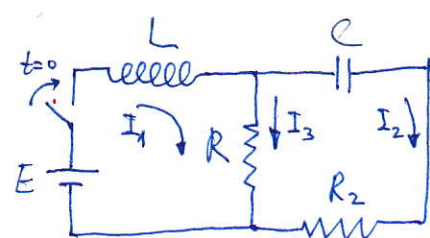
פרק 2 - פרק 3 (7)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 = -k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1) \\ m_2 \ddot{y}_2 = -k_2 (y_2 - y_1) - k_3 y_2 \end{cases}$$



פרק 3 - פרק 4 (8)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 = -k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1) \\ m_2 \ddot{y}_2 = -k_2 (y_2 - y_1) + k_3 (y_3 - y_2) \\ m_3 \ddot{y}_3 = -k_3 (y_3 - y_2) - k_4 y_3 \end{cases}$$



המשוואות - נכתבות על ידי (3)
 (המשוואות הן משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון)
 פתרון

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \frac{R}{L} I_1 - \frac{R}{L} I_2 = \frac{E}{L} \\ \dot{I}_2 + \frac{R^2}{L(R+R_2)} I_1 + \left[\frac{1}{C(R+R_2)} - \frac{R^2}{L(R+R_2)} \right] I_2 = \frac{E \cdot R}{L(R+R_2)} \end{cases}$$