

(4) תאקציה כימית: תאקציה כימית מסוימת קטורה דוגמא של תאקציה כימית
 P זה תאקציה כימית Q תאקציה כימית X . תאקציה כימית
 $P + Q \rightarrow X$ תאקציה כימית

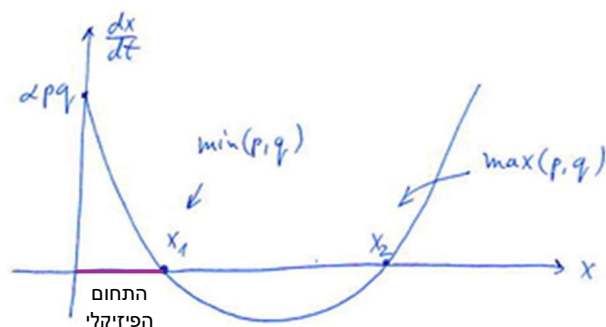
נניח כי $p \neq q$ הם הריכוזים ההתחלתיים של P ו- Q בהתאמה. $x(t)$ הוא
 הריכוז של X בזמן t . לפי $p - x(t)$ ו- $q - x(t)$ הם הריכוזים של P ו- Q
 בזמן t . הקצב של התגובה הכימית הוא α תאקציה כימית

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)(q - x)$$

(א) אם $x(0) = 0$ ו- $x(t)$ כאשר $t \rightarrow \infty$ הריכוזים של P ו- Q הם הריכוזים
 של P ו- Q בהתאמה. הריכוזים של P ו- Q הם הריכוזים של P ו- Q
 בהתאמה. הריכוזים של P ו- Q הם הריכוזים של P ו- Q

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)^2$$

אם $x(0) = 0$ ו- $x(t)$ כאשר $t \rightarrow \infty$ הריכוזים של P ו- Q הם הריכוזים
 של P ו- Q בהתאמה. הריכוזים של P ו- Q הם הריכוזים של P ו- Q



(א) מהכתוב משתמע שכאשר נגמר מי מהחומרים P או Q חדל גם ייצור החומר X ,
 לכן התחום הפיזיקלי של המשוואה הוא $0 \leq x \leq \min(p, q)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \min(p, q)$$

ז"א, לאחר זמן רב יהיה ריכוז החומר X שווה לריכוז ההתחלתי של החומר P או לריכוז
 ההתחלתי של החומר Q , הנמוך מביניהם.

אפשרות משעממת יותר היא שמראש לא היו כלל החומרים P או Q ולכן דבר לא קרה:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

פגם זה הוא הריכוזים של P ו- Q בהתאמה. הריכוזים של P ו- Q הם הריכוזים של P ו- Q

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)(q - x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha(x - p)(x - q) \Rightarrow \frac{1}{(x - p)(x - q)} dx = \alpha dt$$

$$\frac{1}{(x - p)(x - q)} = \frac{A}{x - p} + \frac{B}{x - q} = \frac{(A + B)x - (Aq + Bp)}{(x - p)(x - q)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ Aq + Bp = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ Aq - Ap = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{-1}{p - q} \\ A = \frac{1}{p - q} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x - p)(x - q)} = \frac{A}{x - p} + \frac{B}{x - q} = \frac{1}{p - q} \cdot \frac{1}{x - p} - \frac{1}{p - q} \cdot \frac{1}{x - q} = \frac{1}{p - q} \left(\frac{1}{x - p} - \frac{1}{x - q} \right)$$

$$\frac{1}{p - q} \int \left(\frac{1}{x - p} - \frac{1}{x - q} \right) dx = \alpha \int dt + C \Rightarrow \int \left(\frac{1}{x - p} - \frac{1}{x - q} \right) dx = \alpha(p - q) \int dt + C$$

$$\ln|x - p| - \ln|x - q| = \alpha(p - q)t + C \Rightarrow \ln \frac{p - x}{q - x} = \alpha(p - q)t + C \Rightarrow$$

$$\frac{p-x}{q-x} = e^{\alpha(p-q)t+C} = e^{\alpha(p-q)t+\ln C} = e^{\ln C} e^{\alpha(p-q)t}$$

$$\frac{p-x}{q-x} = C e^{\alpha(p-q)t} \Rightarrow p-x = q C e^{\alpha(p-q)t} - x C e^{\alpha(p-q)t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p - q C e^{\alpha(p-q)t} = x(1 - C e^{\alpha(p-q)t}) \Rightarrow x_{(t)} = \frac{p - q C e^{\alpha(p-q)t}}{1 - C e^{\alpha(p-q)t}}$$

$$x_{(0)} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{p - q C}{1 - C} \Rightarrow C = \frac{p}{q} \Rightarrow x_{(t)} = \frac{p - q \frac{p}{q} e^{\alpha(p-q)t}}{1 - \frac{p}{q} e^{\alpha(p-q)t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = \frac{p - p e^{\alpha(p-q)t}}{1 - \frac{p}{q} e^{\alpha(p-q)t}} \Rightarrow x_{(t)} = \frac{p(e^{\alpha(p-q)t} - 1)}{\frac{p}{q} e^{\alpha(p-q)t} - 1}$$

$$\text{in case } p < q \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_{(t)} = \frac{p(0-1)}{0-1} = p \quad \text{in case } q < p \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_{(t)} = \frac{p(\infty-1)}{\frac{p}{q}\infty-1} = q$$

אם $p=q$ יש להוסיף $\frac{dx}{dt} = \alpha(p-x)^2$

אם $x(0)=0$ אז $x(t)$ היא פונקציה של t שמתאמת ל-0 כ- $t \rightarrow \infty$

$$0 = \alpha(p-x)^2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x_{(t)} = p \quad \text{as expected}$$

(?) פה יש להוסיף את $x(t)$ וזה יתברר שזה נכון

נשתמש בפתרון שכבר קיבלנו בסעיף ב' עבור $p \neq q$ ונשאיף את q ל- p תוך שימוש בקירוב טיילור של e^x כאשר $x \rightarrow 0$:

$$x_{(t)} = \frac{pq(1 - e^{\alpha(p-q)t})}{q - p e^{\alpha(p-q)t}}, \quad p - q \rightarrow 0 \Rightarrow x_{(t)} = \frac{pq(1 - e^\varepsilon)}{q - p e^\varepsilon}$$

$$e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \Rightarrow e^{\alpha(p-q)t} \approx 1 + \alpha(p-q)t$$

$$x_{(t)} = \frac{pq(1 - 1 - \alpha(p-q)t)}{q - p[1 + \alpha(p-q)t]} = \frac{-\alpha pq(p-q)t}{q - p + \alpha p(q-p)t} = \frac{\alpha pq(q-p)t}{(q-p)(1 + \alpha pt)} =$$

$$= \frac{\alpha pqt}{1 + \alpha pt} \quad \text{and since } q = p \text{ we get } x_{(t)} = \frac{\alpha p^2 t}{1 + \alpha pt}$$