

(3) מחלוקת מקורות - כמות שמתחלקת בין שני אוכלוסיות (האדם והזאב) - y הוא חלק האדם, $1-y$ הוא חלק הזאב.

$$y(0) = y_0 \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \alpha y(1-y)$$

$\frac{dy}{dt}$ - מהירות שינוי y - ההצדקה.

y - חלק האדם, $1-y$ - חלק הזאב. α - מקדם פרופורציה.

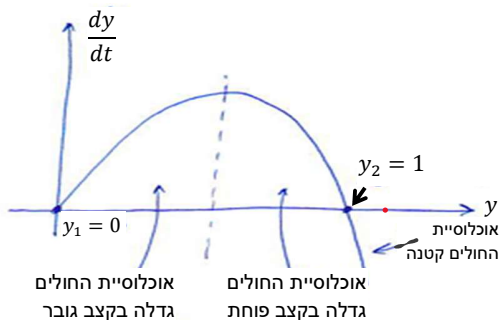
(א) מראה את קצב השינוי של y כפונקציה של y .

(ב) כמות האדם $y(t) \rightarrow 1$ כאשר $t \rightarrow \infty$. זה מראה שהאדם הוא הרושם.

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1-y)$$

$$\text{א) at equilibrium } \frac{dy}{dt} = 0 \quad (y = \text{const.}) \Rightarrow 0 = \alpha y(1-y) \Rightarrow$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1$$



שיווי המשקל ב- y_1 אינו יציב כי ברגע שישנם חולים הם מתרבים. עם גדילתה של אוכלוסיית החולים גובר בהדרגה גם קצב התרבותם עד הגיעו לשיא שלאחריו הוא פוחת בהדרגה לאפס ב- y_2 . בנקודה זו מתייצבת אוכלוסיית החולים. כל גדילה נוספת שלה מביאה לריבוי שלילי אשר מקטין אותה בחזרה ל- y_2 . לאור האמור לעיל y_2 היא נקודת שיווי משקל יציב (משוב שלילי) ואילו y_1 היא נקודת שיווי משקל לא יציב (משוב חיובי).

$y(t) \rightarrow 1$ ככל $t \rightarrow \infty$ כלומר, ההפרש בין y ל-1 הולך וקטן.
 (כלומר, ככל t גדול יותר, y מתקרב ל-1)

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1-y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y(1-y)} = \alpha dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y(y-1)} dy = -\alpha dt$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{(A+B)y - A}{y(y-1)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -A = 1 \\ B = -A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y(y-1)} = \frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$$

$$\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = -\alpha dt \quad \Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = -\alpha \int dt + C$$

$$\ln|y-1| - \ln y = -\alpha t + C \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{1-y}{y} = -\alpha t + C \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1-y}{y} = e^{-\alpha t + C} = e^{-\alpha t + \ln C} = e^{\ln C} e^{-\alpha t}$$

$$\frac{1-y}{y} = C e^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} - 1 = C e^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = 1 + C e^{-\alpha t} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{1 + C e^{-\alpha t}}, \quad y(0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{1 + C} \quad \Rightarrow \quad 1 + C = \frac{1}{y_0} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{y_0} - 1$$

$$y(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_0} - 1 \right) e^{-\alpha t}} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0) e^{-\alpha t}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{y_0}{y_0 + 0} = 1 \quad \text{which implies that eventually the whole population gets infected}$$

לאחר שהאוכלוסייה כולה נדבקת המערכת נמצאת בשיווי משקל יציב – מספר החולים אינו משתנה עוד.

אפשרות שנייה היא שמראש כולם חולים, גם כאן מספר החולים אינו משתנה ולכן המערכת בשיווי משקל יציב.