

(2) מ/זן עפ"י: א/ב/א/ר צ"י האר"ה האצ"ל מסוים האצ"ל האר"ה נשאר
 אר"ה הצי"ר $\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N - EN$ צ"י צ"י צ"י צ"י
 (א) הצי"ר $E < r$, צ"י צ"י צ"י צ"י $N_1 = 0$; $N_2 = K(1 - \frac{E}{r})$;
 (ב) הצי"ר $E > r$, צ"י צ"י צ"י צ"י $N_1 = 0$;
 (ג) yield-effort curve (צ"י צ"י צ"י צ"י). E צ"י צ"י צ"י צ"י ;
 (ד) E צ"י צ"י צ"י צ"י (הצי"ר הצי"ר) צ"י צ"י צ"י צ"י ;
 (ה) $N(t)$ צ"י צ"י צ"י צ"י, אצ"ל אצ"ל.

- (k): **Carrying capacity.** This is the maximum population size that the environment can naturally sustain given its available resources.
- (E): **Harvesting effort.** This measures the intensity of harvesting, hunting, or fishing per unit of time.
- (N): **Population size.** This is the total number of individuals in the population at a given time (t).
- (r): **Intrinsic growth rate.** This is the maximum per-capita growth rate of the population when resources are abundant.
- (EN): **Total yield.** This represents the actual rate at which individuals are removed from the population by harvesting.

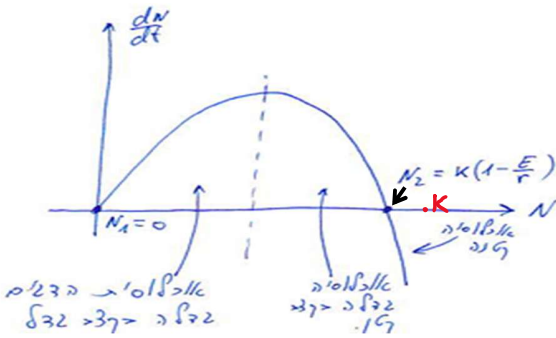
$$\frac{dN}{dt} = N \left[r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - E \right]$$

at equilibrium $\frac{dN}{dt} = 0$ ($N = \text{const.}$) $\Rightarrow 0 = N \left[r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - E \right] \Rightarrow$

$N_1 = 0$, $N_2 = K \left(1 - \frac{E}{r} \right)$ $E < r$ (the fishing rate is lower than the *per capita* growth rate of the population).

note that when $E \rightarrow 0$ (little fishing) then $N_2 \rightarrow K$ (the maximum population size that the environment can naturally sustain).

At the other extreme, when $E \rightarrow r$ (most intensive fishing) then $N_2 \rightarrow 0$ (the population size shrinks to zero).

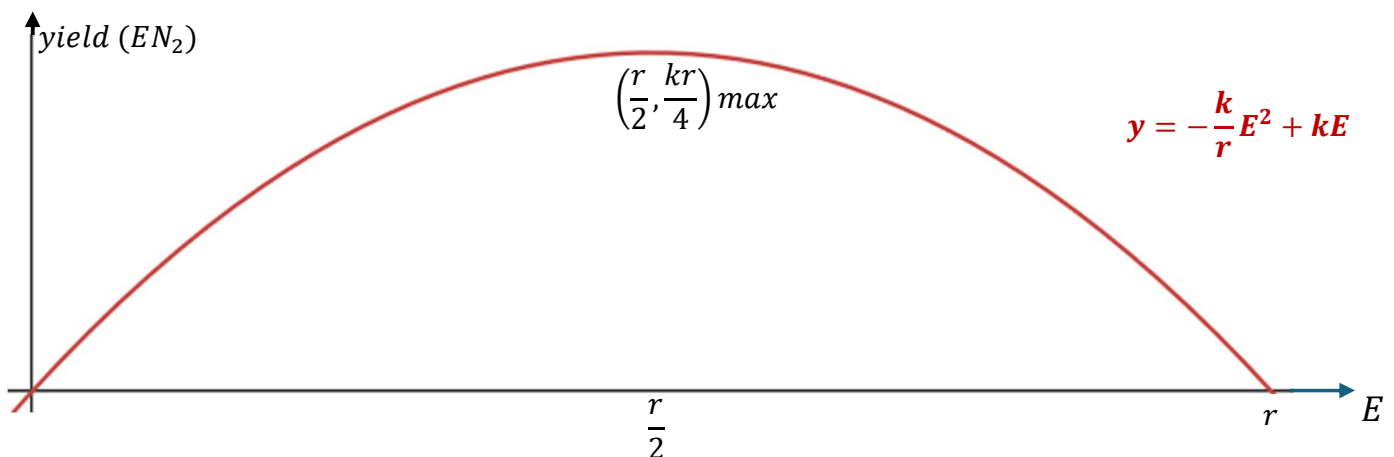


(ב)
 שיווי המשקל ב- N_1 אינו יציב כי ברגע שישנם דגים הם מתרבים - אין דרך חזרה
 לאפס דגים (נזכור כי $E < r$). עם גדילתה של אוכלוסיית הדגים גובר בהדרגה גם
 קצב ריבויים עד הגיעו לשיא שלאחריו הוא פוחת בהדרגה לאפס ב- N_2 .
 בנקודה זו מתייצבת אוכלוסיית הדגים. כל גדילה נוספת שלה מביאה לריבוי שלילי
 אשר מקטין אותה בחזרה ל- N_2 .
 לאור כל האמור לעיל N_2 היא נקודת שיווי משקל יציב (משוב שלילי) ואילו N_1 היא
 נקודת שיווי משקל לא יציב (משוב חיובי).

(2) מצא את הנקודה y כחלק מהמאמץ E . נניח $y = EN_2$:
 Yield-Effort curve (המאמץ-הפדיון). במצב הפדיון צריך להגיע הנקודה $(\frac{r}{2}, \frac{kr}{4})$.

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N - EN \quad y = EN \text{ is the yield} \quad E \text{ is the effort}$$

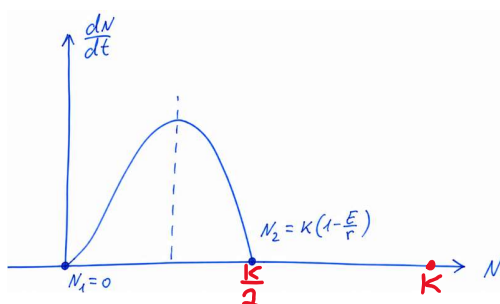
$$y = EN_2 \Rightarrow y = Ek \left(1 - \frac{E}{r}\right) \Rightarrow y = -\frac{k}{r}E^2 + kE$$



(3) מצא את E (המאמץ הנדרש) כדי לקבל פדיון מקסימלי. מהו הפדיון המקסימלי?

בסעיף א' הבנו שעל קצב הדייג (E) להיות נמוך מקצב הריבוי הטבעי (r) של הדגים, ז"א לקיים $0 \leq E < r$.
 כעת נשאלת השאלה מה צריך להיות קצב הדייג כדי שתפוקת הדייג (הפדיון $E \cdot N_2$) תהיה מרבית.
 התשובה האינטואיטיבית והנכונה היא "אמצע התחום", כפי שמראה גרף הפדיון-מאמץ שלעיל.
 לגרף זה סימטריה פרבולית ולכן הוא מגיע לשיאו בדיוק באמצע התחום:

$$y = -\frac{k}{r}E^2 + kE \Rightarrow \left(\frac{r}{2}, \frac{kr}{4}\right) \text{ is the max point}$$



זוהי בעצם שאלת אופטימיזציה – מציאת הפשרה האופטימלית בין קצב הדייג (E) לבין גודל אוכלוסיית הדגים (N_2).
 כ"א משני הפרמטרים האלה מגדיל את תפוקת הדייג כשלעצמו, אך הם באים האחד ע"ח השני.
 התפוקה המרבית היא אם כך $\frac{kr}{4}$ והיא מתקבלת כאשר קצב הדייג (E) שווה למחצית קצב הריבוי הטבעי של הדגים (r).
 במצב זה $N_2 = \frac{k}{2}$, ז"א אוכלוסיית הדגים שווה למחצית מגודלה הטבעי המרבי, ללא דייג.

