

$$xy' + y - y^2 e^{2x} = 0$$

(2)

$$y' + \frac{1}{x}y = y^2 \frac{e^{2x}}{x}$$

$y' + p(x)y = y^n q(x)$ (משוואה דיפרנציאלית מסוג ברנולי) $n=1$ / $n=0$ / $n \neq 0, 1$ $\frac{!}{\text{נדרש להפוך למשוואה ליניארית}}$
 פתרון: $y^{1-n} = \left[C + (1-n) \int q(x) e^{\int (1-n)p(x) dx} dx \right] e^{-\int (1-n)p(x) dx}$

$$n = 2 \Rightarrow 1 - n = -1, \quad P_{(x)} = \frac{1}{x}, \quad Q_{(x)} = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$y^{-1} = \left[C - \int \frac{e^{2x}}{x} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right] e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

$$y^{-1} = \left[C - \int \frac{e^{2x}}{x} e^{-\ln x} dx \right] e^{\ln x}$$

$$y^{-1} = \left[C - \int \frac{e^{2x}}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \right] x$$

$$y^{-1} = \left[C - \int \frac{e^{2x}}{x^2} dx \right] x$$

$$\int e^{2x} \cdot \frac{1}{x^2} dx \rightarrow \begin{cases} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases} = -\frac{1}{x} e^{2x} + 2 \int \frac{e^{2x}}{x} dx$$

$$y^{-1} = \left[C + \frac{1}{x} e^{2x} - 2 \int \frac{e^{2x}}{x} dx \right] x$$

$$y = \frac{1}{Cx + e^{2x} - 2x \int \frac{e^{2x}}{x} dx}$$

את האינטגרל הזה נפתור בעזרת טור חזקות:

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$$

$$\frac{e^{2x}}{x} = \frac{1}{x} + 2 + \frac{4x}{2!} + \frac{8x^2}{3!} + \dots = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{k-1}}{k!}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{x} dx = \ln |x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k \cdot k!} + C = \ln |x| + 2x + x^2 + \frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \dots + C$$

$$y = \frac{1}{Cx + e^{2x} - 2x \left[\ln |x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k \cdot k!} \right]}$$

$$y = \frac{1}{Cx + e^{2x} - 2x \ln |x| - 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k \cdot k!}}$$