

$$y' + P_{(x)}y = Q_{(x)}$$

אם $Q_{(x)} = 0$ אז המשוואה היא הומוגנית.

נוסחה לפתרון המשוואה:

$$y_{(x)} = \left[C + \int Q_{(x)} \cdot e^{\int P_{(x)} \cdot dx} dx \right] e^{-\int P_{(x)} \cdot dx}$$

דוגמה: פתור את המשוואה

$$y' + 3y = x$$

פתרון:

$$P_{(x)} = 3 \quad , \quad Q_{(x)} = x$$

$$y_{(x)} = \left[C + \int x \cdot e^{\int 3 \cdot dx} dx \right] e^{-\int 3 \cdot dx}$$

$$y_{(x)} = \left[C + \int x \cdot e^{3x} dx \right] e^{-3x}$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x \cdot e^{3x} dx \rightarrow \begin{cases} u = x & \rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x} dx & \rightarrow v = \frac{e^{3x}}{3} \end{cases}$$

$$\int x \cdot e^{3x} dx = \frac{x \cdot e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} \cdot dx = \frac{x \cdot e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}$$

$$y_{(x)} = \left[C + \frac{x \cdot e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} \right] e^{-3x}$$

$$y_{(x)} = C \cdot e^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{9}$$

נזכור כי המשוואה הייתה

$$y' + 3y = x$$

ונבדוק את הפתרון שהתקבל:

$$y' = \frac{d}{dx} \left[C \cdot e^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right] = -3C e^{-3x} + \frac{1}{3}$$

$$3y = 3 \left[C \cdot e^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right] = 3C \cdot e^{-3x} + x - \frac{1}{3}$$

$$y' + 3y = -3C e^{-3x} + \frac{1}{3} + 3C \cdot e^{-3x} + x - \frac{1}{3} = x$$

קיבלנו בבדיקה

$$y' + 3y = x$$

ואם כך הפתרון נכון