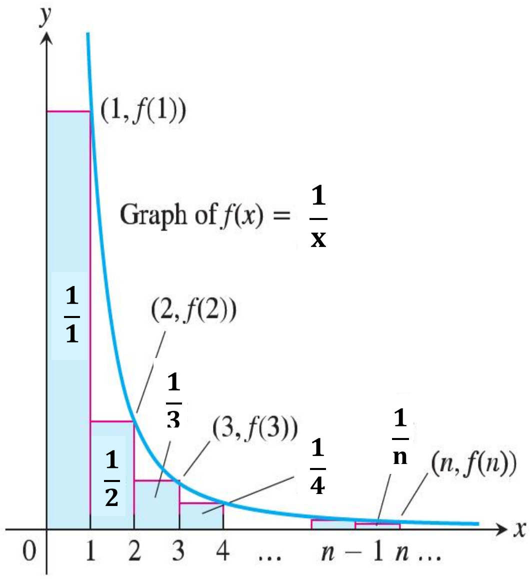
חלק א' – טורים אינסופיים (שאלת חובה, 25 נקודות)

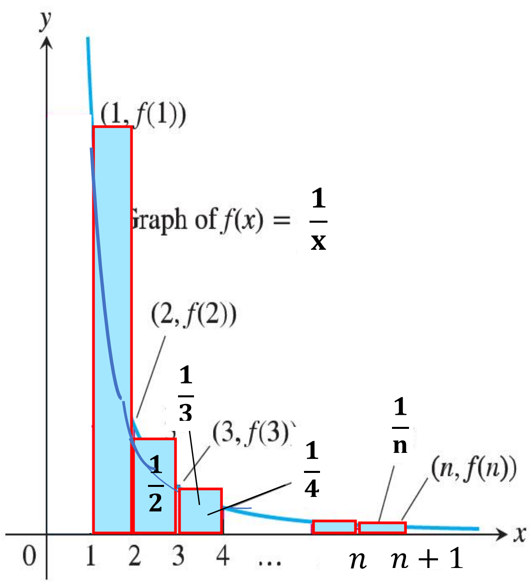
א. יש להוכיח את אי-השוויון הבא תוך שימוש בציורים מתאימים. למעשה, יש להוכיח כי הסכום החלקי של הטור ההרמוני (עד n סופי) מקיים את אי השוויון, $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \le 1+\int_1^{n}\frac{1}{x}dx = 1+\ln n$. (20 נקודות)



האיור משמאל מראה כי סכום שטחיהם של n מלבנים תחת גרף הפונקציה (ז"א הסכום החלקי ה- "n"י של הטור $\sum\frac{1}{n}$), קטן מהשטח המתאים שמתחת לגרף.

$$= \text{סכום שטחי המלבנים} = S_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$= f_{(1)}+f_{(2)}+f_{(3)}+\cdots+f_{(n)} < 1+\int_1^n \frac{1}{x}dx$$



האיור שכאן מראה כי סכום שטחיהם של n מלבנים "מעל" גרף הפונקציה (ז"א הסכום החלקי ה- "n"י של הטור $\sum\frac{1}{n}$), גדול מהשטח המתאים שמתחת לגרף (שים לב שהמלבן ה- "n"י מסתיים ב- $x=n+1$).

$$= \text{סכום שטחי המלבנים} = S_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$= f_{(1)}+f_{(2)}+f_{(3)}+\cdots+f_{(n)} > \int_1^n \frac{1}{x}dx$$

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx < \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

חלק א' – טורים אינסופיים (שאלת חובה, 25 נקודות)

א. יש להוכיח את אי-השוויון הבא תוך שימוש בציורים מתאימים. למעשה, יש להוכיח כי הסכום החלקי של הטור ההרמוני (עד n סופי) מקיים את אי השוויון, $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \le 1+\int_1^{n}\frac{1}{x}dx = 1+\ln n$. (20 נקודות)