מדוע מאבדים נקודות ?

<u>אי סדר</u>

חשוב שיהיו רשומים בבירור מספרי הסעיפים ותת הסעיפים.

אין לרשום את התשובה לסעיף ג' תחת הכותרת של סעיף ב', במקום תחת הכותרת של סעיף ג'.

כדאי למרקר או להקיף במלבן את התשובה הסופית.

<u>תשובה שאינה מדויקת</u>

יש להשיב בדיוק על מה שנשאלת, לא בערך (ראה דיון בהמשך על ההבדל שבין סדרה לבין טור, סעיף ד', כדוגמה).

כשהתשובה הינה מספרית, רצוי לא לעגל, ואם אין ברירה, יש לעגל באופן סביר.

<u>תשובות מילוליות:</u>

כשנדרש הסבר מילולי, עליו להיות קצר ועינייני (במיוחד אם צוין בטופס הבחינה "הסבר במשפט אחד").

כל המוסיף גורע!

<u>ליטוש אלגברי:</u>

ממש כשם שבמקום 5+3 רושמים 8 (למרות שזה "אותו הדבר"), יש ללטש תשובות אלגבריות **ככל שניתן**.

על מנה להיות פשוטה - ללא "ריבוי קומות", ומצומצמת ככל שניתן.

sin cos ו- tan של "זוויות מפורסמות" יש לרשום כשבר. לדוגמה: $\sin 60°$ ירשם כ- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ו- $\tan 30°$ ירשם כ- $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

<u>ההבדל שבין "לרשום" לבין "לפתח":</u>

כשאתה מתבקש "לרשום טור טיילור של פונקציה", הכוונה היא פשוט לכך.

אם הטור נתון בדף הנוסחאות, כל שיש לעשות הוא להעתיקו למחברת הבחינה.

אם הטור אינו רשום בדף הנוסחאות, אך הנבחן מזהה דרך פשוטה ומהירה למציאת הטור (למשל אם הפונקציה מתארת סכום של טור הנדסי אינסופי), אדרבא, הוא רשאי לנצל זאת ולחסוך זמן ומאמץ.

כשהנבחן מתבקש "לפתח טור טיילור של פונקציה", הכוונה היא לפיתוח הטור בדרך הפורמאלית.

בעמוד הבא מובאת כדוגמה שאלה מס' 1 מבוחן אמצע 2016 בחדו"א 2.

תחילה מוצג הפיתרון כפי שעליו להיראות, ולאחר מכן דיון קצר בצורת "עשה ואל תעשה".

אח"כ מובאת כדוגמה שאלה מס' 3 מאותו הבוחן, ופתרונה כפי שעליו להיראות (ללא דיון).

1. התבונן באיורים שמתחת.

א. באיור השמאלי מתואר משולש שווה צלעות שאורך צלעו $2b$. מהו שטחו ? (5 נקודות).

ב. באיור האמצעי צויר משולש פנימי הפוך, אף הוא שווה צלעות. מה שטחו ? (10 נקודות).

ג. באיור הימני צוירו עוד שלושה משולשים הפוכים מסביב למשולש הפנימי, זהים זה לזה ושווי צלעות.
מהו **סכום** שטחיהם ? (10 נקודות).

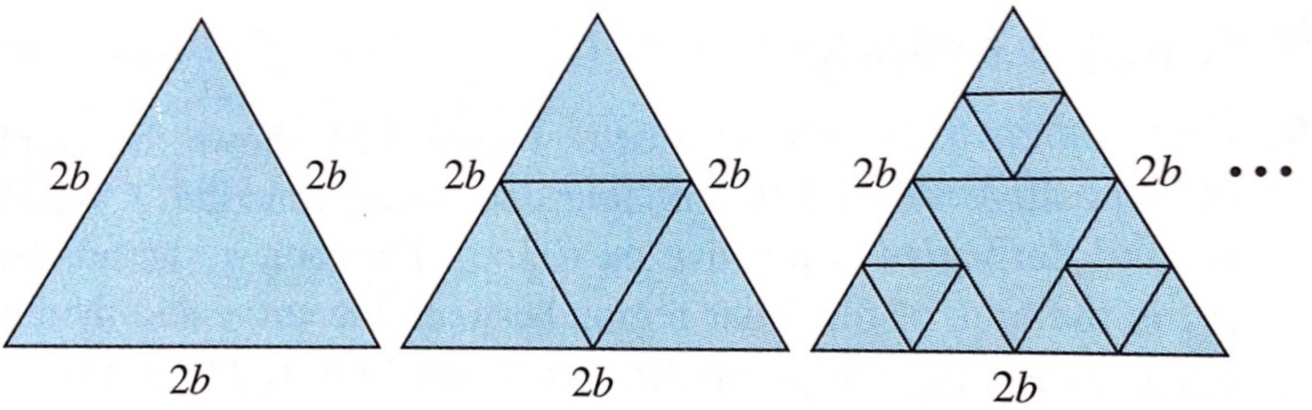
ד. באופן זה נמשיך לצייר מחזורים של משולשים **הפוכים** שווי צלעות.
המשולשים בכל מחזור קטנים ורבים מאלה שבמחזור הקודם.
נבנה סדרה אינסופית, אשר כל איבר בה שווה לסכום שטחי המשולשים שבמחזור המתאים.
במחזור הראשון ישנו משולש יחיד – המשולש ההפוך שבאיור האמצעי.

i. רשום את שלושת האיברים הראשונים בסדרה. (5 נקודות)

ii. רשום ביטוי לאיבר הכללי של הסדרה. (5 נקודות)

iii. רשום ביטוי לסכום אינסוף איבריה של הסדרה, באופן המקובל (עם סיגמא). (5 נקודות)
מהי משמעותו של ביטוי זה מבחינה גיאומטרית ? הסבר במשפט אחד. (5 נקודות).

iv. כעת חשב את ערכו של הביטוי מסעיף iii (הראה את אופן החישוב). (15 נקודות)
האם הערך שקיבלת מאשש את ההסבר שנתת בסעיף iii ?



פיתרון מינימאלי על מנת לקבל את מלוא הנקודות:

א. $A = \frac{2b \cdot 2b \cdot sin60°}{2} = \sqrt{3}b^2$

ב. $A = \frac{b \cdot b \cdot sin60°}{2} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}b^2$

ג. $3A = \frac{\frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}b \cdot sin60°}{2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}b^2$

ד. i. $\left\{ \frac{\sqrt{3}b^2}{4}, \frac{3\sqrt{3}b^2}{16}, \frac{9\sqrt{3}b^2}{64}, \dots, \frac{3^{n-1}\sqrt{3}b^2}{4^n}, \dots \right\}$

ii. $a_n = \frac{3^{n-1}\sqrt{3}b^2}{4^n}$

iii. $\sum \frac{3^{n-1}\sqrt{3}b^2}{4^n} = \sum_0^\infty \frac{3^n\sqrt{3}b^2}{4^{n+1}} = \sum_0^\infty \frac{3^n\sqrt{3}b^2}{4 \cdot 4^n} = \frac{\sqrt{3}b^2}{4}\sum_0^\infty \frac{3^n}{4^n} = \frac{\sqrt{3}b^2}{4}\sum_0^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^n$

הביטוי מייצג את שטח המשולש הגדול שבאיור השמאלי – סכום שטחיהם של אינסוף משולשים פנימיים.

iv. $\frac{\sqrt{3}b^2}{4}\sum_0^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{3}b^2}{4} \cdot \frac{1}{1-0.75} = \frac{\sqrt{3}b^2}{4} \cdot 4 = \sqrt{3}b^2$

כן, התקבלה תוצאה השווה לשטחו של המשולש הגדול מסעיף א'.

"עשה" ו"אל תעשה"

א. $A=\frac{2b\cdot 2b\cdot \sin 60^\circ}{2}$ תשובה זו אינה מלוטשת מספיק מבחינה אלגברית, ומאבדים לכן 2-3 נקודות.

על הפיתרון להיראות כך לכל הפחות: $A=\frac{2b\cdot 2b\cdot \sin 60^\circ}{2}=\sqrt{3}b^2$

"לכל הפחות" משמעו שאפשר להוסיף שלבי ביניים אלגבריים, אך התשובה הסופית צריכה להיות $\sqrt{3}b^2$.

ב. $A=\frac{b\cdot b\cdot \sin 60^\circ}{2}=\frac{b\cdot b\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$ פיתרון זה אינו מלוטש מספיק מבחינה אלגברית.

על הפיתרון להיראות כך לכל הפחות: $A=\frac{b\cdot b\cdot \sin 60^\circ}{2}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}b^2=\frac{\sqrt{3}b^2}{4}$

גם $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}b^2$ יתקבל כאן כתשובה סופית מספקת.

ג. על הפיתרון להיראות כך לכל הפחות : $3A=\frac{\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{2}b\cdot \sin 60^\circ}{2}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}b^2=\frac{3\sqrt{3}b^2}{16}$

גם $3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}b^2$ יתקבל כאן כתשובה מספקת.

ד.

i. $\frac{9\sqrt{3}b^2}{64}+\frac{3\sqrt{3}b^2}{16}+\frac{\sqrt{3}b^2}{4}$ תשובה זו מראה שהמשיב אינו מודע להבדל שבין "איברים של טור" לבין

"איברים של סדרה" אשר אותם התבקש לרשום. מאבדים לכן 2-3 נקודות.

על התשובה להיראות כך : $\left\{\frac{\sqrt{3}b^2}{4}\ ,\ \frac{3\sqrt{3}b^2}{16},\ \frac{9\sqrt{3}b^2}{64}\ ,\ \dots\right\}$

או כך : $a_1=\frac{\sqrt{3}b^2}{4}\quad a_2=\frac{3\sqrt{3}b^2}{16}\quad a_3=\frac{9\sqrt{3}b^2}{64}$

ii. על התשובה להיראות כך : $a_n=\frac{3^{n-1}\sqrt{3}b^2}{4^n}$ או כך : $a_n=\frac{3^{n-1}}{4^n}\sqrt{3}b^2$ או כך : $a_n=\frac{\sqrt{3}b^2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

אם מבוצעת הזזת אינדקס כך שהספירה מתחילה ב- $n=0$ $\left(a_n=\frac{3^n}{4^{n+1}}\sqrt{3}b^2\right)$ יש לציין זאת.

iii. מטרת חלקו הראשון של הסעיף היא דקדוקית גרידא – לוודא שהמשיב יודע שבמקום לרשום טור באופן

המפורש: $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ אפשר לרשומו בקיצור כך: $\sum a_n$, או בהזזת אינדקס: $\sum_0^\infty a_n$.

חלקו השני של הסעיף עוסק **במשמעות הגיאומטרית** של הטור $\sum a_n$. יש להסביר שטור זה מייצג את שטח המשולש הגדול שבאיור השמאלי – סכום שטחיהם של אינסוף משולשים פנימיים הפוכים.

iv. כאן על המשיב **לחשב** את ערכה של הסיגמה מסעיף iii ולהראות את אופן החישוב.

הסיגמה הנ"ל מתארת טור הנדסי אינסופי, לכן יש להשתמש בנוסחה $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ לחישוב ערכה:

$$\frac{\sqrt{3}b^2}{4}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}b^2}{4}\cdot\frac{1}{1-0.75} = \frac{\sqrt{3}b^2}{4}\cdot 4 = \sqrt{3}b^2$$

לבסוף על המשיב לכתוב שתוצאת החישוב הנ"ל שווה לשטח המשולש הגדול אשר חושב בסעיף א', והדבר מאשש את ההסבר שניתן בחלקו השני של סעיף iii לגבי המשמעות הגיאומטרית של $\sum a_n$.

3. א. מהו טור מקלורן של $f(x) = \frac{1}{1-x}$? (10 נקו'). מהו תחום ההתכנסות של הטור? (10 נקו').

ב. רשום את טור טיילור סביב 1 של $g(x) = \ln x$. (5 נקו').

העזר בטור שרשמת כדי לחשב את הערך שאליו מתכנס הטור ההרמוני המתחלף. (5 נקו').

ג. עשה הצבה מתאימה בטור מסעיף ב' , כך שלאחר גזירה של שני האגפים תקבל את טור מקלורן של סעיף א'.

פיתרון א': $\frac{1}{1-x}$ היא תבנית מוכרת של טור הנדסי : $\frac{a_1}{1-q}$, לכן הטור מתקבל מיידית:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \sum x^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} x^n$$

תחום ההתכנסות של הטור מתקבל אף הוא מיידית על פי התנאי הידוע להתכנסותו של טור הנדסי: $-1 < q < 1$.

במקרה דנן $q = x$ כך שתחום ההתכנסות של הטור הינו $-1 < x < 1$.

פיתרון ב': טור טיילור סביב 1 של $\ln x$ רשום בדף הנוסחאות:

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

אם מציבים בו $x = 2$ מתקבל הטור ההרמוני המתחלף, לכן הערך שאליו מתכנס הטור ההרמוני המתחלף הינו $\ln 2$

פיתרון ג':

אנו יודעים ש- $\frac{1}{1-x}$ היא הנגזרת של $-\ln(1-x)$, לכן :

נכפול את שני האגפים של הטור מסעיף ב' ב- (1-) :

$$-\ln x = -(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots = \sum(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}$$

ונציב $(1-x)$ במקום x :

$$-\ln(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots = \sum\frac{x^n}{n}$$

נגזור כעת את שני האגפים, ונקבל את טור מקלורן של סעיף א':

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \sum x^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} x^n$$