א. עליך לפתח את הפונקציה $f_{(x)} = ln(x)$ לטור חזקות סביב $x = 1$ תוך שימוש בנוסחה לטור חזקות.
עליך לרשום שלושה איברים ראשונים (ז"א עד האיבר מסדר שלישי) לפחות.

פתרון:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \cdots$$

$$f_{(x)} = ln(x) \quad => \quad f_{(1)} = 0$$

$$f'_{(x)} = \frac{1}{x} \quad => \quad f'_{(1)} = 1$$

$$f''_{(x)} = -\frac{1}{x^2} \quad => \quad \frac{f''_{(1)}}{2!} = -\frac{1}{2}$$

$$f'''_{(x)} = \frac{2}{x^3} \quad => \quad \frac{f'''_{(1)}}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$f^{(4)}_{(x)} = \frac{-6}{x^4} \quad => \quad \frac{f^{(4)}_{(1)}}{4!} = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(5)}_{(x)} = \frac{24}{x^5} \quad => \quad \frac{f^{(5)}_{(1)}}{5!} = \frac{1}{5}$$

.

.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n} \quad => \quad \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1)^n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot (x-1)^k$$

ב. מהו תחום ההתכנסות של טור החזקות שפיתחת?
מה ניתן לומר על תחום ההתכנסות של טור החזקות לעומת תחום ההגדרה של הפונקציה?

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1)^n \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (x-1)^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^n \cdot (x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n-1} \cdot (x-1)^n} = -\frac{n}{n+1} \cdot (x-1)$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \cdot |x-1|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x-1| = |x-1| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x-1|$$

מבחן המנה:

$$|x-1| < 1 \quad => \quad -1 < x-1 < 1 \quad => \quad 0 < x < 2$$

בתחום זה, הטור מתכנס באופן מוחלט.

בדיקת קצה ימני:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot(2-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ldots+$$

זהו טור הרמוני מתחלף אשר מתכנס כפי שהוא (לפי קריטריון לייבניץ), אך מתבדר באופן מוחלט (מתקבל טור הרמוני "רגיל").
אם כך, עבור $x=2$ הטור מתכנס בתנאי.

בדיקת קצה שמאלי (הפונקציה ממילא לא מוגדרת בו, אבל בשביל הספורט):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot(0-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = -\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{n}+\cdots\right]$$

זהו טור הרמוני (שלילי) אשר מתבדר כידוע.

לסיכום, הטור מתכנס בתחום $0<x\le 2$ ובתחום זה:

$$f_{(x)} = ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot(x-1)^k$$

תחום ההגדרה של $f_{(x)}$ הינו $0<x$.
ניתן לומר שטור החזקות של $f_{(x)}$ אשר פותח לעיל שקול לפונקציה $f_{(x)}$ רק בחלק צר יחסית של תחום ההגדרה שלה.

ג. בעזרת טור החזקות של $f_{(x)}$, לאיזה ערך מתכנס הטור ההרמוני המתחלף?

$$f_{(2)} = ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot(2-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ldots+$$

הטור ההרמוני המתחלף מתכנס אם כך לערך $ln(2)$

ד. פתח את $g_{(x)}=\frac{1}{1-x}$ לטור חזקות בעזרת טור החזקות שפיתחת ל- $f_{(x)}=ln(x)$

$$f_{(1-x)} = ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot(1-x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot(-x)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-1}}{k}\cdot x^k = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot x^k$$

$$\frac{d}{dx}ln(1-x) = -\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot(x)^k$$

$$\frac{-1}{1-x} = -\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}$$

$$g_{(x)} = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

ה. מהו תחום ההתכנסות של טור החזקות של $g_{(x)}$?
זהו טור הנדסי אשר מנתו היא $q=x$ ולכן תחום ההתכנסות שלו הוא $-1<x<1$

ו. בעזרת טור החזקות של $g_{(x)}$ מצא לאיזה ערך מתכנס הטור של זנו ולאיזה ערך מתכנס הטור המתחלף של זנו.

$$g_{(x)} = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$g_{(1/2)} = \frac{1}{1-1/2} = 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

הטור של זנו מתכנס אם כך לערך 2

$$g_{(-x)} = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n \cdot x^n + \cdots$$

$$g_{(-1/2)} = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

הטור המתחלף של זנו מתכנס אם כך לערך $\frac{2}{3}$

ז. בעזרת טור החזקות של $g_{(x)}$ מצא את הפונקציה $h_{(x)}$ אשר טור החזקות שלה הוא $1 + 2x + 3x^2 + \cdots$

$$g_{(x)} = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$g'_{(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)$$

$$g'_{(x)} = \frac{-1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

$$h_{(x)} = \frac{-1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

ח. בעזרת $h_{(x)}$ מצא לאיזה ערך מתכנס הטור $1 + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + \cdots$

טור זה מתבדר כי איבריו הולכים וגדלים.