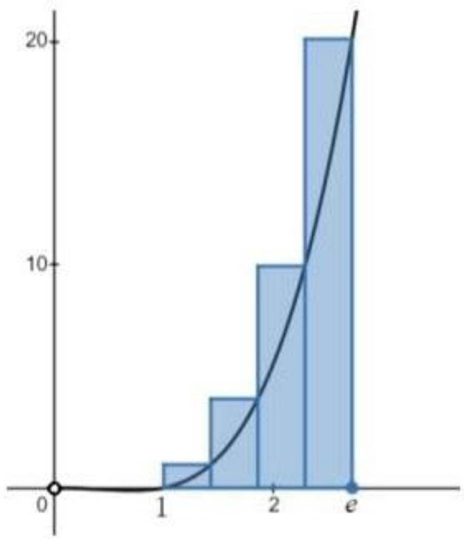


שאלה 3 פונקציה קדומה וסכום רימן (25 נקודות)

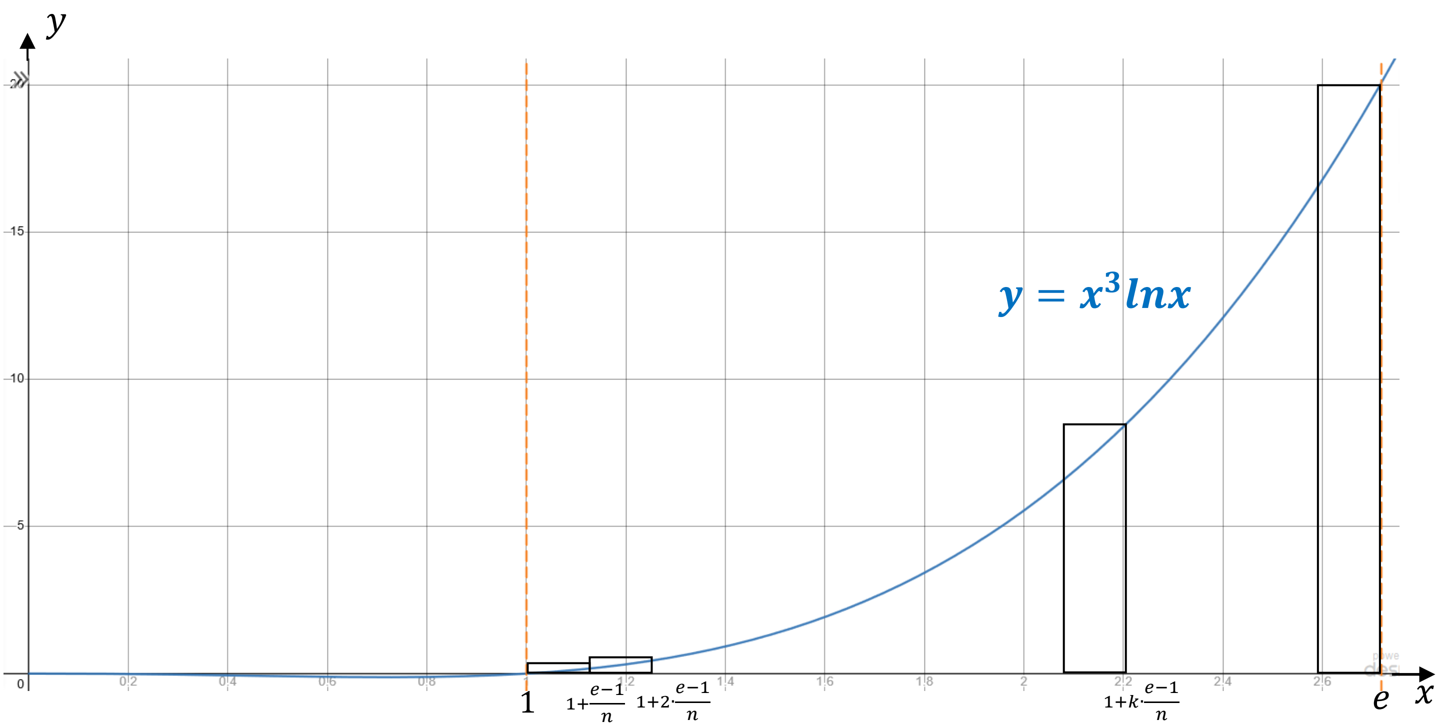
נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 lnx$.

א. (8 נקודות) כתבו את סכום רימן המתאים לאינטגרל $\int_1^e f(x)dx$.

ב. (8 נקודות) מצאו קירוב לערך של $\int_1^e f(x)dx$ באמצעות חישוב של $\sum_{k=1}^{4} f(x_k)\Delta x$.
(היעזרו בסרטוט משמאל.)

ג. (9 נקודות) הוכיחו כי הפונקציה $g(x) = \frac{x^4}{4} \cdot lnx - \frac{x^4}{16}$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ וחשבו בעזרתה את האינטגרל $\int_1^e f(x)dx$.

פתרון סעיף א':



אם נחלק את האינטרוול $[1, e]$ ל- n תת-אינטרוולים שווים, יהיה רוחבו של כל תת-אינטרוול $\Delta x = \frac{e-1}{n}$.

מאחר שהקצה השמאלי של האינטרוול הוא 1 , מתקבל

$$x_1 = 1 + \Delta x \quad , \quad x_2 = 1 + 2\Delta x \ , \ldots\ldots , \quad x_k = 1 + k\Delta x \ , \ldots\ldots , \quad x_{n-1} = 1 + (n-1)\Delta x \quad , \quad x_n = 1 + n\Delta x$$

$$x_1 = 1 + \frac{e-1}{n} \quad , \quad x_2 = 1 + 2\cdot\frac{e-1}{n} \ , \ldots , \quad x_k = 1 + k\cdot\frac{e-1}{n} \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \quad x_n = 1 + n\cdot\frac{e-1}{n} = e$$

x_k הוא קצהו הימני של תת-האינטרוול ה-"kי", ולכן $f_{(x_k)}$ הוא גובהו של המלבן ה-"kי".
רוחבו של כל מלבן הוא Δx , ולכן שטחו של המלבן ה-"kי" הוא $A_k = f_{(x_k)} \cdot \Delta x$. נרשום זאת באופן מפורט:

$$A_1 = f_{(X_1)} \cdot \Delta x = \left(1+\frac{e-1}{n}\right)^3 ln\left(1+\frac{e-1}{n}\right) \cdot \Delta x$$

$$A_2 = f_{(X_2)} \cdot \Delta x = \left(1+2\cdot\frac{e-1}{n}\right)^3 ln\left(1+2\cdot\frac{e-1}{n}\right) \cdot \Delta x$$

.
.
.

$$A_k = f_{(X_k)} \cdot \Delta x = \left(1+k\cdot\frac{e-1}{n}\right)^3 ln\left(1+k\cdot\frac{e-1}{n}\right) \cdot \Delta x$$

.
.
.

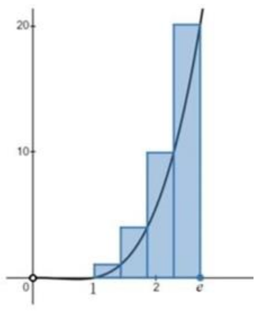
$$A_n = f_{(X_n)} \cdot \Delta x = \left(1+n\cdot\frac{e-1}{n}\right)^3 ln\left(1+n\cdot\frac{e-1}{n}\right) \cdot \Delta x = e^3 lne \cdot \Delta x = e^3 \cdot \Delta x$$

סכום שטחי n המלבנים הוא אם כך:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1+k\cdot\frac{e-1}{n}\right)^3 ln\left(1+k\cdot\frac{e-1}{n}\right) \cdot \Delta x$$

אם נשאיף את מספר המלבנים לאינסוף ($n \to \infty$) ישאף רוחבו של כל מלבן לאפס ($\Delta x \to 0 \ => \ \Delta x = dx$)
והסכום (הסיגמה) יהפוך לאינטגרל :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+k\cdot\frac{e-1}{n}\right)^3 ln\left(1+k\cdot\frac{e-1}{n}\right) \cdot \Delta x = \int_1^e x^3 lnx \cdot dx$$



ב. (8 נקודות) מצאו קירוב לערך של $\int_1^e f(x)dx$
באמצעות חישוב של $\sum_{k=1}^{4} f(x_k)\Delta x$.
(היעזרו בסרטוט משמאל.)

פתרון סעיף ב':

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4}\left(1+k\cdot\frac{e-1}{4}\right)^3 ln\left(1+k\cdot\frac{e-1}{4}\right) \cdot \frac{e-1}{4} =$$

$$\left[\left(1+\frac{e-1}{4}\right)^3 ln\left(1+\frac{e-1}{4}\right) + \left(1+2\cdot\frac{e-1}{4}\right)^3 ln\left(1+2\cdot\frac{e-1}{4}\right) + \left(1+3\cdot\frac{e-1}{4}\right)^3 ln\left(1+3\cdot\frac{e-1}{4}\right) + \left(1+4\cdot\frac{e-1}{4}\right)^3 ln\left(1+4\cdot\frac{e-1}{4}\right)\right]\frac{e-1}{4} =$$

$$= \left[\left(\frac{e+3}{4}\right)^3 ln\left(\frac{e+3}{4}\right) + \left(\frac{e+1}{2}\right)^3 ln\left(\frac{e+1}{2}\right) + \left(\frac{3e+1}{4}\right)^3 ln\left(\frac{3e+1}{4}\right) + e^3\right]\frac{e-1}{4} = 15.05257224$$

ג. (9 נקודות) הוכיחו כי הפונקציה

$f(x)$ היא פונקציה קדומה של $g(x)=\frac{x^4}{4}\cdot lnx-\frac{x^4}{16}$

וחשבו בעזרתה את האינטגרל $\int_1^e f(x)dx$.

פתרון סעיף ג':

$$g_{(x)}=\frac{x^4}{4}lnx-\frac{x^4}{16} \quad => \quad g'_{(x)}=x^3lnx+\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}-\frac{x^3}{4}=x^3lnx+\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{4}=x^3lnx=f_{(x)}$$

$$\int_1^e f_{(x)}\cdot dx=\int_1^e x^3lnx\cdot dx=\left[\frac{x^4}{4}lnx-\frac{x^4}{16}\right|_1^e=\frac{e^4}{4}-\frac{e^4}{16}-\left(-\frac{1}{16}\right)=\frac{3e^4+1}{16}\approx 10.3$$

שימו לב שבסעיף ב' חולק התחום <u>רק</u> לארבעה מלבנים, לכן יצא סכום שטחיהם גדול בהרבה מערך האינטגרל שחושב כאן.