1. נתון $f(x)=e^{g(x)}$, $g(x)=\int_2^x \frac{t}{t^2+1}dt$

חשבו את $f'(2)$

פתרון:

$$f_{(x)}=e^{g_{(x)}} \quad => \quad f'_{(x)}=g'_{(x)}\cdot e^{g_{(x)}} \quad => \quad f'_{(2)}=g'_{(2)}\cdot e^{g_{(2)}}=?$$

$$g_{(x)}=\frac{1}{2}\int_2^x \frac{2t}{t^2+1}dt -> \begin{cases} u=t^2+1 \\ du=2tdt \end{cases} = \frac{1}{2}\int_5^{x^2+1}\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}ln|u|\Big|_5^{x^2+1} = \frac{1}{2}ln\frac{x^2+1}{5}$$

$$g_{(x)}=ln\sqrt{\frac{x^2+1}{5}} \quad => \quad g_{(2)}=ln1=0$$

אבל כל זה מיותר אם שמים לב ש-

$$g_{(x)}=\int_2^x\frac{t}{t^2+1}dt \quad => \quad g_{(2)}=\int_2^2\frac{t}{t^2+1}dt \quad = \quad 0 \qquad shorter\ and\ much\ more\ elegant!$$

כעת נותר לחשב את $g'_{(2)}$, בעזרת המשפט היסודי או באמצעות גזירה ישירה.

$$g'_{(x)}=\frac{d}{dx}g_{(x)}=\frac{d}{dx}\int_2^x\frac{t}{t^2+1}dt = \frac{x}{x^2+1} \quad => \quad g'_{(2)}=\frac{2}{5}$$

ולסיום:

$$f'_{(2)}=g'_{(2)}\cdot e^{g_{(2)}}=\frac{2}{5}e^0=\frac{2}{5}$$

כעת, סתם בשביל הספורט, חישוב $g'_{(x)}$ באמצעות גזירה ישירה:

$$g_{(x)}=ln\sqrt{\frac{x^2+1}{5}} \quad => \quad g'_{(x)}=\sqrt{\frac{5}{x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{5}}}\cdot\frac{2}{5}x \quad = \quad \frac{x}{5}\cdot\frac{5}{x^2+1} \quad = \quad \frac{x}{x^2+1}$$