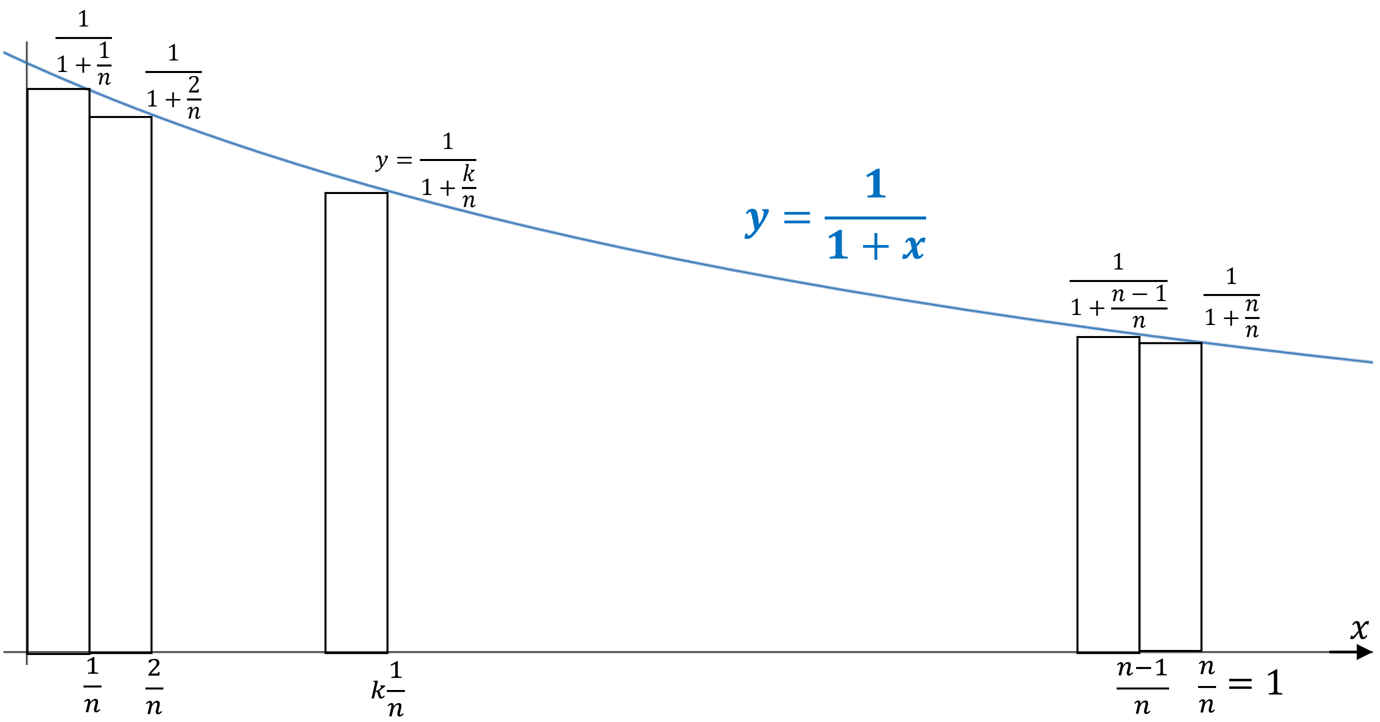
מצא את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ והסבר כל שלב, כולל התחום של האינטגרל וציור של הפונקציה בתחום.

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\cdots+\frac{n}{n+n}\right)\frac{1}{n} \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+2\cdot\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+k\cdot\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+n\cdot\frac{1}{n}}\right)\frac{1}{n} = ?$$



אם נחלק את האינטרוול $[0,1]$ ל- n תת-אינטרוולים שווים, יהיה רוחבו של כל תת-אינטרוול $\Delta x=\frac{1}{n}$.

מאחר שהקצה השמאלי של האינטרוול הוא 0 , מתקבל

$x_1=\Delta x \quad , \quad x_2=2\Delta x \quad , \quad x_3=3\Delta x \;, \dots\dots, x_k=k\Delta x \;, \dots\dots\dots, \quad x_{n-1}=(n-1)\Delta x \quad , \quad x_n=n\Delta x$

$x_1=\frac{1}{n} \quad , \quad x_2=2\frac{1}{n} \quad , \quad x_3=3\frac{1}{n} \;, \dots\dots \;, x_k=k\frac{1}{n} \;, \dots\dots\dots, \quad x_{n-1}=(n-1)\frac{1}{n} \quad , \quad x_n=n\frac{1}{n}=b$

x_k הוא קצהו הימני של תת-האינטרוול ה- "k"י, ולכן $f_{(x_k)}$ הוא גובהו של המלבן ה- "k"י (ראה ציור).

רוחבו של כל מלבן הוא Δx , ולכן שטחו של המלבן ה- "k"י הוא $A_k=f_{(x_k)}\cdot\Delta x$. נרשום זאת באופן מפורט:

$$A_1 = f_{(X_1)} \cdot \Delta x = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \Delta x$$

$$A_2 = f_{(X_2)} \cdot \Delta x = \frac{1}{1+\frac{2}{n}} \cdot \Delta x$$

.
.
.

$$A_k = f_{(X_k)} \cdot \Delta x = \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \Delta x$$

.
.
.

$$A_n = f_{(X_n)} \cdot \Delta x = \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \cdot \Delta x$$

נסכום כעת את שטחי $\boldsymbol{n}$ המלבנים :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \Delta x = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}$$

כעת נשאיף את מספר המלבנים לאינסוף ($n \to \infty$) כך שרוחבו של כל מלבן ישאף לאפס ($\Delta x \to 0 \;=>\; \Delta x = dx$) והסכום (הסיגמה) יהפוך לאינטגרל :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \Delta x = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \cdot dx = ln|1+x|\Big|_0^1 =$$

$$= ln2 - ln1 = ln2$$

לסיכום,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \cdot dx = ln2$$