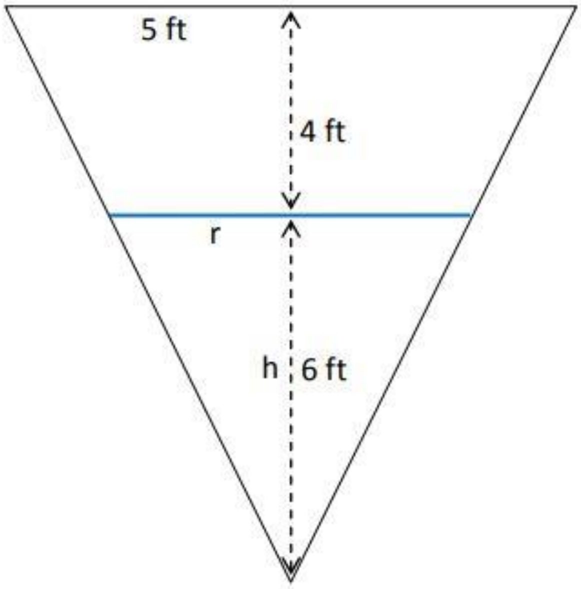
מים נכנסים לתוך המאגר
במהירות של $9\left(\frac{(ft)^3}{min}\right)$
המאגר הוא בצורה של חרוט הפוך (החרוט עומד על הקודקוד שלו).
הגובה של החרוט $10ft$
ורדיוס הבסיס $5ft$
מהי מהירות עליית המים במאגר כאשר עומקם שווה ל $6ft$?
$\frac{feet}{minute}$



$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}^{?} \quad => \quad 9 = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{h}{r} = \frac{10}{5} \quad => \quad r_{(h)} = \frac{h}{2} \quad => \quad r^2 = \frac{h^2}{4}$$

$$V_{(r,h)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad => \quad V_{(h)} = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h^2}{4}\cdot h = \frac{1}{12}\pi h^3 \quad => \quad \frac{dV}{dh} = \frac{1}{4}\pi h^2$$

$$9 = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} \quad => \quad 9 = \frac{1}{4}\pi h^2\cdot\frac{dh}{dt}^{?} \quad => \quad \frac{dh}{dt} = \frac{36}{\pi h^2} \quad => \quad \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=6} = \frac{36}{\pi 6^2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{feet}{minute}\right]$$

כעת באמצעות הגדרת הנגזרת:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad => \quad 9 = \frac{V_{new} - V_{old}}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t}$$

$$V_{(h)} = \frac{1}{12}\pi h^3 \quad => \quad V_{old} = V_{(6)} = \frac{1}{12}\pi\cdot 6^3 = 18\pi \ [(ft)^3] \qquad V_{new} = V_{(6+\Delta h)} = \frac{1}{12}\pi\cdot(6+\Delta h)^3 \ [(ft)^3]$$

$$9 = \frac{V_{new} - V_{old}}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad => \quad 9 = \frac{\frac{1}{12}\pi\cdot(6+\Delta h)^3 - 18\pi}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad => \quad 108 = \pi\cdot\frac{(6+\Delta h)^3 - 216}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad =>$$

$$=> \quad 108 = \pi\cdot\frac{6^3 + 3\cdot 6^2\Delta h + 3\cdot 6\Delta h^2 + \Delta h^3 - 216}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad => \quad 108 = \pi\cdot\frac{3\cdot 6^2\Delta h + 3\cdot 6\Delta h^2 + \Delta h^3}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad =>$$

$$=> \quad 108 = \pi\cdot(3\cdot 6^2 + 3\cdot 6\Delta h + \Delta h^2)\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad =>$$

$$108 = \pi\cdot\lim_{\Delta h\to 0}[3\cdot 6^2 + 3\cdot 6\Delta h + \Delta h^2]\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta h}{\Delta t}\right] = \pi\cdot\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$108 = \pi\cdot 3\cdot 6^2\cdot\frac{dh}{dt} \quad => \quad \frac{1}{\pi}\left[\frac{feet}{minute}\right] = \frac{dh}{dt}$$

כעת בשיטה העתיקה של היוונים אשר לא היכירו את אופרטור הגבול:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad => \quad 9 = \frac{\Delta V}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t}$$

קובעים קודם כל את הסטייה המותרת בערכו של המשתנה הבלתי תלוי (h במקרה זה), נניח 1%.
מקובל לקרוא לסטייה זו "הדיוק", ולמרות שאין זה לגמרי נכון לקרוא לה כך, נעשה זאת גם אנחנו.

$$h_{old} = 6\ [ft] \quad , \quad \Delta h = 1\% = 0.01\cdot h_{old} = 0.01\cdot 6 = 0.06\ [ft] \quad , \quad h_{new} = h_{old} + \Delta h = 6.06\ [ft]$$

$$V_{(h)} = \frac{1}{12}\pi h^3 \quad => \quad V_{old} = V_{(6)} = \frac{1}{12}\pi\cdot 6^3 = 18\pi\ [(ft)^3]$$

$$V_{new} = V_{(6.06)} = \frac{1}{12}\pi\cdot 6.06^3 = 18.545418\pi \approx 58.262\ [(ft)^3]$$

$$\Delta V = V_{new} - V_{old} = 18.545418\pi - 18\pi = 0.545418\pi\ [(ft)^3]$$

$$9 = \frac{\Delta V}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad => \quad 9 = \frac{0.545418\pi}{0.06}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad => \quad 9 = 28.558\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad => \quad \frac{\Delta h}{\Delta t} = 0.31515 \left[\frac{feet}{minute}\right]$$

ראינו קודם שהתוצאה המדויקת היא $\frac{1}{\pi} \approx 0.31831 \left[\frac{feet}{minute}\right]$

למטה - הגרף של $V_{(h)}$ אשר מתאר את נפח המים כתלות בעומקם.

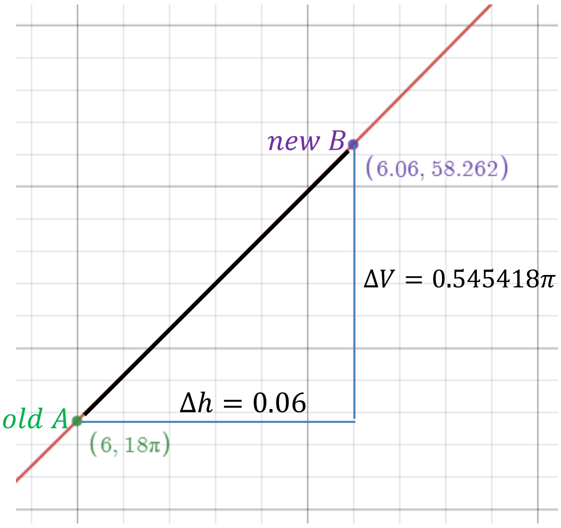
מימין - הגדלה של הקטע הרלוונטי בגרף.

$\frac{\Delta V}{\Delta h}$ שמתקבל בחישוב (28.558 במקרה הנ"ל) הוא למעשה שיפוע המיתר AB.

ככל שהדיוק גבוה יותר (0.1%, 0.01% וכך הלאה), קרובה יותר הנקודה new לנקודה old ושיפוע המיתר הופך דומה יותר לשיפוע המשיק $\left(\frac{dV}{dh}\right)$ בנקודה old.

כאשר השתמשנו בהגדרת הנגזרת, הפעלנו את אופרטור הגבול אשר קירב את new ל- old עד בלי די וגרם למיתר AB להתלכד עם המשיק בנקודה old.

שיפוע המיתר $\left(\frac{\Delta V}{\Delta h}\right)$ הפך להיות שיפוע המשיק $\left(\frac{dV}{dh}\right)$ והושג דיוק מוחלט.



לבסוף ראוי לומר שכלל השרשרת גם הוא לא היה מוכר ליוונים. לבעיה מסוג זה הם נגשו כך:

$$Rate\ of\ water\ flow\ is\ constant:\ 9\left[\frac{(ft)^3}{minute}\right] \quad => \quad V_{(t)} = 9t$$

$$V_{(h)} = \frac{1}{12}\pi h^3 \quad => \quad h_{(V)} = \sqrt[3]{\frac{12V}{\pi}} \quad => \quad h_{(t)} = \sqrt[3]{\frac{12V_{(t)}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{12\cdot 9t}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{108t}{\pi}} \quad =>$$

$$=> \quad t_{(h)} = \frac{\pi}{108}h^3 \quad => \quad t_{(6)} = \frac{\pi}{108}\cdot 6^3 = 2\pi\ [min]$$

כעת הם קבעו את הדיוק הנדרש, נניח 1% כמקודם.

$$t_{old} = 2\pi\ \ [min] \quad , \quad \Delta t = 1\% = 0.01\cdot t_{old} = 0.02\pi\ \ [min] \quad , \quad t_{new} = t_{old} + \Delta t = 2.02\pi\ \ [min]$$

$$h_{old} = 6\ \ [ft]\ \ (given)$$

$$h_{(t)} = \sqrt[3]{\frac{108t}{\pi}} \quad => \quad h_{new} = h_{(2.02\pi)} = \sqrt[3]{\frac{108\cdot 2.02\pi}{\pi}} = 6.0199337\ \ [ft]$$

$$\Delta h = h_{new} - h_{old} = 6.0199337 - 6 = 0.0199337\ \ [ft]$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{0.0199337}{0.02\pi} = 0.31725\ \ \left[\frac{feet}{minute}\right]$$

להזכירנו, התוצאה המדויקת היא $\frac{1}{\pi} \approx 0.31831\ \left[\frac{feet}{minute}\right]$

הקירוב שהתקבל כאן טוב יותר מזה שהתקבל קודם (0.31515) כשהשתמשנו בכלל השרשרת, למרות שבשני המקרים דרשנו "דיוק" של 1%. מדוע?
מפני שבקטע הרלוונטי, $h_{(t)}$ בה אנו משתמשים כאן משתנה לאט יותר מ- $V_{(h)}$ שבה השתמשנו קודם, ולכן שיפוע המיתר שבין הנקודות **מראש** דומה יותר לשיפוע המשיק בנקודה old.
אם כך, הסטייה המותרת בערכו של המשתנה הבלתי תלוי ("הדיוק") אינה אחראית לבדה לאיכות הקירוב שמתקבל.
קצב השינוי (בתחום הרלוונטי) של הפונקציה בה משתמשים אחראי לכך לא פחות ולפעמים אפילו יותר.